

HAUPTAUFsätze

Zur Theorie des Gasdrucks gegen eine bewegte Wand

Von G. Schweikert in Dingelstädt (Eichsfeld)

Auf der Grundlage der kinetischen Theorie der Gase wird eine Theorie des Gasdruckes gegen eine bewegte Wand entwickelt, die der Änderung des Impulses und der Geschwindigkeitskomponente der stoßenden Moleküle in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Wand Rechnung trägt, aber gegebene Dichte und Temperatur des Gases unmittelbar an der bewegten Wand voraussetzt. Es wird eine wichtige Formel gewonnen, die zeigt, daß der Gasdruck für ein ideales Gas mit wachsender Wandgeschwindigkeit asymptotisch gegen Null geht, während für die realen Gase der Gasdruck bereits bei endlichen Werten der Wandgeschwindigkeit — je nach der Größe der Abweichung vom idealen Gaszustand — auf Null herabsinkt.

Basing on the kinetic gas theory, a theory of the gas pressure against a moved wall is developed that takes account of the change of the impulse and of the component of velocity of the impact molecules but presumes the knowledge of the density and the temperature of the gas close by the moved wall. An important formula is obtained proving that while the pressure in case of an ideal gas converges to zero with increasing velocity of the wall the pressure of a real gas is already declining to zero at finite values of the velocity of the wall according to the amount of deviation from the state of the ideal gas.

Исходя из кинетической теории газов разрабатывается теория давления газа на движущуюся стену. При этом учитывается изменение импульса и составляющих скоростей ударяющих молекул в зависимости от скорости стены, а относительно плотности и температуры газа предполагается, что они даны непосредственно у движущейся стены. Выводится существенная формула, из которой видно, что давление идеального газа при возрастающей скорости стены асимптотически стремится к нулю, тогда как в случае неидеального газа давление падает до нуля уже при конечных скоростях, соответственно степени отклонения от идеального состояния газа.

Einleitung

Bereits vor 25 Jahren habe ich zum ersten Male darauf hingewiesen¹⁾, daß aus der kinetischen Theorie der Gase eine Änderung des Gasdrucks gegen eine bewegte Wand gegenüber dem Gasdruck auf eine ruhende Wand folgt, und habe damals eine einfache Formel für die Abhängigkeit des Gasdrucks von der Geschwindigkeit der Wand unter vereinfachenden Voraussetzungen abgeleitet. Die damals entwickelte Theorie trug zunächst der Änderung des Impulses Rechnung, der von den stoßenden Molekülen auf die bewegte Wand ausgeübt wird.

Seitdem sind noch einige Abhandlungen²⁾ erschienen, die gleichfalls nur die Änderung des Impulses bei gleicher mittlerer Molekulargeschwindigkeitskomponente ohne Annahme eines Verteilungsgesetzes und nur den idealen Gaszustand berücksichtigen, oder aber auf hydrodynamischer Grundlage die Änderung der Dichte an der Wand infolge der Strömungsvorgänge in den Gasen zu berechnen versuchen.

Es sind nun drei grundsätzlich verschiedene Umstände, welche die Änderung des Gasdrucks auf eine Wand infolge ihrer Bewegung bedingen und zwar ist es: 1. die Änderung des Impulses, der von den stoßenden Molekülen auf die Wand übertragen wird, infolge der Bewegung der Wand; 2. die Änderung der Geschwindigkeitskomponente der stoßenden Moleküle nach der Reflexion an der bewegten Wand, — diese Änderung der molekularen Geschwindigkeitskomponente senkrecht zur Wand infolge ihrer Bewegung ist zugleich die mechanische Ursache für die Änderung der Temperatur des Gases bei adiabatischer Zustandsänderung durch Arbeitsleistung gegen einen Kolben —, und 3. die Änderung der Gasdichte an der bewegten Wand infolge der Änderung des Volumens, das der freien Bewegung der Gasmoleküle zur Verfügung steht. In der folgenden Theorie zur Ableitung des Gasdrucks gegen eine bewegte Wand wird die dritte der vorstehend genannten Ursachen zunächst außer acht gelassen. Ferner berücksichtigen wir von der zweiten der obigen Ursachen für die Änderung der Geschwindigkeitskomponente der Moleküle durch den Stoß gegen die bewegte Wand zunächst nur die Wirkung dieses Umstandes auf die Änderung des Gasdrucks, nicht hingegen die Wirkung auf die Änderung

¹⁾ Vgl. Innere Ballistik. Leipzig 1923, S. 58.

²⁾ Da mir keine Literatur zurzeit zur Verfügung steht, kann ich diese Arbeiten leider nicht näher bezeichnen.

der Temperatur des Gases. Wir betrachten also in unserer nachstehenden Theorie die Dichte und Temperatur des Gases unmittelbar an der bewegten Wand als vorgegebene Größen.

§ 1. Ableitung des Druckes, der von den Molekülen einer gegebenen Geschwindigkeitskomponente (x) auf eine bewegte Wand ausgeübt wird

Wir gehen in unserer gaskinetischen Theorie davon aus, daß der von den stoßenden Molekülen auf die bewegte Wand übertragene Impuls nach den Gesetzen des zentralen, elastischen Stoßes eine Änderung in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (v) der Wand erfährt und zwar ändert sich nach diesem Gesetz die Geschwindigkeitskomponente (x) des stoßenden Moleküls in der zur Wand senkrechten Richtung. Die Geschwindigkeitsänderung (dv) der Wand infolge des Impulses eines einzelnen mit der Geschwindigkeitskomponente (x) senkrecht zur Wand stoßenden Moleküls beträgt bekanntlich³⁾:

$$dv = \frac{2m}{M+m}(x-v),$$

wobei m die Masse des Moleküls und M die Masse der Wand ist. Da letztere stets sehr groß gegen erstere ist, kann diese Gleichung einfacher geschrieben werden:

$$dv = \frac{2m}{M}(x-v) \quad \dots \dots \dots (1).$$

Die durch den Stoß auf die Wand ausgeübte Kraft beträgt:

$$K = M \cdot \frac{dv}{dt} = o \cdot p \quad \dots \dots \dots (2),$$

wenn o die Oberfläche der Wand, p den Druck und dt das (unendlich) kleine Zeitelement bezeichnet, in dem im Mittel ein Molekül mit der Geschwindigkeitskomponente x gegen die Wand stößt, oder anders ausgedrückt: dt ist das mittlere Zeitelement zwischen zwei aufeinander folgenden Molekülstoßen mit der Komponente x gegen die mit der Geschwindigkeit v bewegte Wand.

Die wesentliche Aufgabe unserer Theorie besteht nun darin, dieses mittlere Zeitelement dt in Abhängigkeit von allen dasselbe beeinflussenden Momenten der Molekülbewegung zu bestimmen, also insbesondere unter dem Einfluß der mittleren freien Weglänge (L), des mittleren Radius (ρ), der mittleren Stoßdauer (τ) der Moleküle, sowie unter dem Einfluß der Geschwindigkeit (v) der Wand.

Wir berechnen zunächst, wie auch früher, das gleichfalls praktisch unendlich kleine Zeitintervall \bar{dt}_x , in dem im Mittel die Anzahl n_x der in einer Elementarschicht von der Höhe l_x vorhandenen Moleküle mit der Geschwindigkeitskomponente x in Richtung der mit der Geschwindigkeit v bewegten Wand gegen diese stoßen. Entsprechend diesen Festsetzungen ist

$$o = n_x \cdot l_x^2 \quad \dots \dots \dots (3).$$

Wir betrachten nun ein bestimmtes Molekül der Geschwindigkeitskomponente x in der Elementarschicht l_x an der bewegten Wand. Sein Abstand von der Wand im gegebenen Augenblick betrage $\frac{1}{r} \cdot l_x$, wobei der Wert $r \geq 1$ sei. Die Zeit, die vergeht, bis es gegen die Wand stößt, sei dt_1 . Dann gilt die Beziehung:

$$\bar{dt}_1 = k \cdot \frac{\frac{1}{r} l_x + v \cdot dt_1}{x} \quad \dots \dots \dots (4),$$

da die Wand sich in der Zeit dt_1 um die Strecke $v \cdot dt_1$ fortbewegt. Der Faktor k hat dabei den Wert⁴⁾:

$$k = 1 + \frac{x \cdot \tau - \varepsilon \rho}{L + \varepsilon \rho} \quad \dots \dots \dots (4*).$$

³⁾ Vgl. a. a. O. S. 5,

⁴⁾ a. a. O. S. 6 und G. Schweikert, Zur Theorie der Zustandsgleichung der Gase. Z. Physik 1934.

Er trägt der mittleren Wegverkürzung ($\varepsilon \rho$) und der mittleren Stoßdauer (τ), sowie der mittleren freien Weglänge (L) der Moleküle Rechnung. Der Faktor k charakterisiert also die Abweichung des Gases vom idealen Zustand, für den $k = 1$ ist.

Nach dem Stoß muß sich das betrachtete Molekül bis zum Abstand $\left(1 - \frac{1}{r}\right) \cdot l_x$ zurückbewegen, um in die der Lage vor dem Stoß entsprechende relative Lage zur Wand nach dem Stoß zu kommen. Die hierzu benötigte Zeit sei dt_2 . Es gilt dann:

$$dt_2 = k \cdot \frac{\left(1 - \frac{1}{r}\right) l_x - v \cdot dt_1}{x - 2v} \dots \dots \dots (5),$$

da die Geschwindigkeitskomponente nach dem Stoß den Wert $x - 2v$ angenommen hat infolge der Bewegung der Wand, und da sich außerdem der zu durchlaufende Weg um den Betrag $v \cdot dt_1$ verkleinert, wenn die Lage des Moleküls relativ zur Wand während der Dauer der Wandbewegung unverändert bleiben soll. Aus den beiden Gleichungen (4) und (5) läßt sich das gesamte Zeitelement dt_r in folgender Weise berechnen. Zunächst folgt: $(x - k \cdot v) dt_1 = \frac{1}{r} \cdot k \cdot l_x$ und $[x - (2 - k)v] dt_2 = \frac{r-1}{r} \cdot k \cdot l_x$. Also ist:

$$dt_r = dt_1 + dt_2 = k \cdot l_x \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{x - kv} + \frac{r-1}{r} \cdot \frac{1}{x - (2-k)v} \right].$$

Durch einfache Umformung erhält man daraus:

$$dt_r = k \cdot l_x \cdot \frac{x - k \cdot v - \frac{2}{r} (1 - k) \cdot v}{x^2 - 2vx + k(2 - k) \cdot v^2} \dots \dots \dots (6).$$

Aus diesem Wert dt_r erhält man schließlich durch Summierung über alle möglichen r -Werte das gesuchte Zeitelement dt_x , in welchem die n_x Moleküle der Elementarschicht l_x , deren Geschwindigkeitskomponente zwischen x und $x + dx$ liegt, gegen die bewegte Wand stoßen.

Da wir gleichmäßige Verteilung der Moleküle über den Raum voraussetzen, so läßt sich der Faktor $1/r$ in Gl. (6) durch folgenden Ausdruck darstellen:

$$\frac{1}{r} = i \cdot \frac{1}{n_x}; \quad i = 1, 2, 3 \dots n_x \dots \dots \dots (7),$$

wobei n_x eine gegen die Einheit sehr (unendlich) große Zahl ist. So folgt weiterhin:

$$\overline{dt_x} = \frac{1}{n_x} \cdot \sum dt_r = k \cdot l_x \cdot \frac{x - k \cdot v - \frac{2}{n_x} (1 - k) v \cdot \sum \frac{1}{r}}{x^2 - 2vx + k(2 - k) \cdot v^2} \dots \dots \dots (8).$$

Es ist aber:

$$\sum \frac{1}{r} = \frac{1}{n_x} \cdot \sum_{i=1}^{n_x} i = \frac{1}{n_x} \cdot \frac{n_x(n_x+1)}{2} = \frac{n_x+1}{2} \approx \frac{n_x}{2}.$$

Das mittlere Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Molekülstoßen mit der Geschwindigkeitskomponente x beträgt somit:

$$dt = \frac{k \cdot l_x}{n_x} \cdot \frac{x - k \cdot v - \frac{n_x+1}{n_x} (1 - k) \cdot v}{x^2 - 2vx + k(2 - k) \cdot v^2} = k \cdot \frac{l_x}{n_x} \cdot \frac{x - v}{x^2 - 2vx + k(2 - k) \cdot v^2} \dots \dots \dots (9).$$

Für den idealen Gaszustand ist $k = 1$, und daher reduziert sich vorstehender Ausdruck auf die einfachere Form:

$$dt_{id} = \frac{l_x}{n_x \cdot (x - v)} \dots \dots \dots (9*).$$

Die durch den Stoß von n_x Molekülen der Elementarschicht l_x mit der Geschwindigkeitskomponente x auf die bewegte Wand ausgeübte Kraft sei entsprechend Gl. (2) mit K_x bezeichnet. Dann ergibt sich:

$$K_x = M \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_x = 2 \frac{n_x \cdot m}{k \cdot l_x} [x^2 - 2vx + k(2 - k) \cdot v^2] = o \cdot p_x.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung von Gl. (3):

$$p_x = \frac{2m}{k \cdot l_x^3} [x^2 - 2vx + k(2-k) \cdot v^2].$$

Darin ist noch $l_x^3 = \frac{V}{N_x}$, während $l^3 = \frac{V}{N}$ ist, daher $l_x^3 = \frac{N}{N_x} \cdot l^3$. Ferner ergibt das Verhältnis $\left(\frac{m}{l^3}\right)$ von Molekülmasse und Volumen des Elementarwürfels die Massendichte $\frac{\delta}{g}$ des Gases $\frac{m}{l^3} = \frac{\delta}{g}$. N_x ist die Zahl der Moleküle mit der Geschwindigkeitskomponente x im Gasvolumen V , und N die gesamte Zahl der Moleküle überhaupt. Es läßt sich daher auch schreiben

$$p_x = \frac{2\delta}{k \cdot g} \cdot \frac{N_x}{N} [x^2 - 2vx + k(2-k) \cdot v^2] \quad \dots \dots \dots (10).$$

Dieses ist also der Ausdruck für den Druckanteil p_x (Partialdruck), den die Moleküle mit der Geschwindigkeitskomponente x bei ihrem Stoß gegen die mit der Geschwindigkeit v bewegte Wand ausüben.

§ 2. Einführung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes

Wenn aus der Gl. (10) der Ausdruck für den Gasdruck auf die mit der Geschwindigkeit v bewegte Wand gewonnen werden soll, so muß das Gesetz bekannt sein, nach dem die Geschwindigkeitskomponente x über die Anzahl N_x der Moleküle verteilt ist. Da die Grundlagen für die Aufstellung eines genaueren Verteilungsgesetzes in dem hier betrachteten Fall noch fehlen, so wählen wir in gebräuchlicher Weise das Maxwell'sche Verteilungsgesetz, beachten aber, daß seine Anwendung allgemein einer Idealisierung des wirklichen Gaszustandes entspricht, da die Moleküle durch den Stoß gegen die bewegte Wand einseitig ihre Geschwindigkeitskomponente (x) ändern, wodurch eine zunehmende Abweichung vom Maxwell'schen Verteilungsgesetz mit wachsender Geschwindigkeit (v) der Wand bedingt sein wird.

Nach dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz ist nun die Anzahl N_x der Moleküle mit der Geschwindigkeitskomponente x bekanntlich durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\frac{N_x}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \alpha} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2} \cdot dx \quad \dots \dots \dots (11).$$

Führen wir Gl. (11) in Gl. (10) ein und setzen zugleich zur Abkürzung den Wert der relativen Geschwindigkeitsgrößen

$$\frac{x}{\alpha} = z; \quad \frac{v}{\alpha} = v_r; \quad \frac{dx}{\alpha} = dz \quad \dots \dots \dots (12),$$

wobei α den wahrscheinlichsten Wert der Molekulargeschwindigkeit bezeichnet, so gewinnen wir das Druckdifferential

$$dp_x = \frac{\delta \cdot \alpha^2}{k \cdot g} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot [z^2 - 2v_r z + k(2-k) \cdot v_r^2] \cdot e^{-z^2} dz \quad \dots \dots \dots (13).$$

Der Faktor von v_r^2 ist hierin eine Funktion von k , er ist also durch die Abweichung des Gases vom idealen Zustand in seiner Größe bestimmt.

Den Wert von k gemäß Gl. (4*) formen wir folgendermaßen um:

$$k = 1 + \frac{x \cdot \tau - \varepsilon \varrho}{L + \varepsilon \varrho} = 1 + \vartheta; \quad \vartheta = \frac{x \cdot \tau - \varepsilon \varrho}{L + \varepsilon \varrho} \quad \dots \dots \dots (14).$$

Dann wird: $k(2-k) = (1+\vartheta)(1-\vartheta) = 1-\vartheta^2$. Da in dem Ausdruck für ϑ die Stoßdauer τ der Moleküle offenbar noch eine Funktion der Molekulargeschwindigkeit ist, so müßte für eine strenge Auswertung der Gl. (13) τ als Funktion von x gegeben sein. Wir können uns jedoch dadurch helfen, daß wir entweder τ als einen konstanten Mittelwert ansehen, der nur eine Funktion der Temperatur des Gases ist, oder aber noch einfacher die Größe ϑ selbst als einen kon-

stanten Mittelwert betrachten, indem wir statt x die mittlere Geschwindigkeitskomponente α substituieren und den Ausdruck $\alpha \cdot \tau$ als eine gegebene Temperaturfunktion des Gases betrachten,

also statt Gl. (10*) den Ausdruck setzen: $\vartheta = \frac{\alpha \cdot \tau - \varepsilon \varrho}{L + \varepsilon \varrho}$. Dementsprechend ergeben sich

zwei ein wenig verschiedene Wege zur Auswertung der Gl. (13).

$$\left. \begin{aligned} \text{Wir setzen weiterhin: } \frac{\varepsilon \cdot \varrho}{L + \varepsilon \varrho} &= \eta_r(\delta) \sim \frac{\eta}{\delta}; \\ \frac{x \cdot \tau}{L + \varepsilon \varrho} &= \frac{\varepsilon \varrho}{L + \varepsilon \varrho} \cdot \frac{\alpha \cdot \tau}{\varepsilon \varrho} \cdot \frac{x}{\alpha} = \eta_r \cdot \sigma \cdot z; \end{aligned} \right\} \dots \dots (15).$$

$$\sigma = \frac{\alpha \tau}{\varepsilon \varrho}$$

Hierin ist $\eta_r(\delta)$ eine Korrekturgröße, die allein von der Dichte (δ) des Gases abhängt. Für nicht zu hohe Gasdichten ist sie sehr nahe gleich dem Verhältnis η/δ des Eigenvolumens der Moleküle zum Volumen des Gases und geht mit abnehmender mittlerer freier Weglänge (L) gegen den Grenzwert Eins ($\eta_{r(L=0)} = 1$). Für hohe Gasdichten wird aber η_r eine kompliziertere Funktion der Gasdichte.

Die Größe $\sigma = \frac{\alpha \tau}{\varepsilon \varrho}$ ist hingegen eine reine Temperaturfunktion $\sigma(T)$, die mit zunehmender Temperatur stets abnimmt. Unterhalb des Boyle-Punktes (T_B) ist ihr Wert größer als Eins, während er oberhalb des Boyle-Punktes kleiner als Eins wird:

$$T \leq T_B; \sigma \geq 1 \quad \text{und} \quad T \geq T_B; \sigma \leq 1.$$

Nunmehr läßt sich der Wert von ϑ folgendermaßen schreiben:

$$\vartheta = \eta_r \cdot (\sigma \cdot z - 1) \dots \dots \dots (16);$$

und somit wird

$$1 - \vartheta^2 = 1 - \eta_r^2 (\sigma \cdot z - 1)^2 = 1 - \eta_r^2 - (\eta_r \cdot \sigma \cdot z)^2 + 2 \eta_r^2 \cdot \sigma \cdot z.$$

Damit nimmt Gl. (13) folgende Form an:

$$dp_x = \frac{\delta \cdot \alpha^2}{k \cdot g} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot [(1 - \eta_r^2 \sigma^2 v_r^2) \cdot z^2 - 2 v_r (1 - \eta_r^2 \sigma \cdot v_r) \cdot z + (1 - \eta_r^2) v_r^2] e^{-z^2} dz \quad (17).$$

Die den zweiten obigen Festsetzungen, die sich auf die Bedeutung von ϑ beziehen, entsprechende Gleichung für dp_x geht aus der vorstehenden Gleichung dadurch hervor, daß man:

$\sigma = 0$ und η_r^2 durch ϑ^2 ersetzt:

$$dp_x = \frac{\delta \cdot \alpha^2}{k \cdot g} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot [z^2 - 2 v_r z + (1 - \vartheta^2) \cdot v_r^2] \cdot e^{-z^2} dz \dots \dots \dots (18).$$

Da nun von der gesamten Zahl (N) der Moleküle nur diejenigen gegen die Wand stoßen können, deren Geschwindigkeitskomponente x größer als die Geschwindigkeit v der Wand ($z \geq v_r$) ist, so ist der vorstehende Ausdruck über dz von v_r bis ∞ zu integrieren, wodurch sich der gesuchte Wert (p) des Gasdrucks gegen die bewegte Wand ergibt:

$$p = \frac{\delta \cdot \alpha^2}{k \cdot g} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[\int_{v_r}^{\infty} z^2 \cdot e^{-z^2} dz - 2 v_r \cdot \int_{v_r}^{\infty} z \cdot e^{-z^2} dz + (1 - \vartheta^2) v_r^2 \cdot \int_{v_r}^{\infty} e^{-z^2} dz \right] \quad (19).$$

§ 3. Auswertung der auftretenden Integrale

Entsprechend der vorstehenden Gl. (19) sind also folgende drei Teilintegrale auszuwerten:

$$1. \quad \int_{v_r}^{\infty} z^2 \cdot e^{-z^2} dz = \left| -\frac{z}{2} \cdot e^{-z^2} \right|_{v_r}^{\infty} + \frac{1}{2} \int_{v_r}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{v_r}{2} \cdot e^{-v_r^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} (1 - \Phi(v_r)).$$

Dieses Integral ist leicht zu lösen durch partielle Integration, indem man setzt: $z \cdot e^{-z^2} dz = du$; $z = v$, $u = -\frac{1}{2} e^{-z^2}$; $dv = dz$. Die Funktion $\Phi(v_r)$ ist darin in bekannter Weise das Gaußsche Fehlerintegral.

$$2. \quad \int_{v_r}^{\infty} z \cdot e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \cdot e^{-v_r^2};$$

$$3. \quad \int_{v_r}^{\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(v_r)].$$

Die Summe aus diesen 3 Integralen entsprechend dem Klammerausdruck in Gl. (19) bezeichnen wir mit $\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot B(v_r)$. $B(v_r)$ ist also die Korrekturfunktion, mit der der Gasdruck

$p_r = \frac{1}{2} \frac{\delta \cdot \alpha^2}{k \cdot g}$ auf eine ruhende Wand multipliziert werden muß, wenn man den Gasdruck auf die mit der relativen Geschwindigkeit $v_r = \frac{v}{\alpha}$ bewegte Wand erhalten will unter sonst gleichem

Zustand des Gases an der Wand, also bei gleicher Dichte δ und gleicher Temperatur bzw. gleichem Wert (α) der wahrscheinlichsten Molekulargeschwindigkeit.

Wir haben damit folgende endgültigen Ausdrücke für den Gasdruck gegen eine bewegte Wand gefunden:

$$p = \frac{1}{2} \frac{\delta \cdot \alpha^2}{k \cdot g} \cdot B(v_r); \quad \delta = \frac{m}{V} = \frac{N \cdot m}{V}; \quad v_r = \frac{v}{\alpha} \quad \dots \dots (20).$$

$$B(v_r) = \left\{ \begin{aligned} & \left[1 + 2 v_r^2 \left(1 - \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \cdot \eta_r^2 \right) \right] \cdot [1 - \Phi(v_r)] - \\ & - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[1 - 2 v_r \cdot \sigma \left(1 - \frac{1}{2} \sigma \cdot v_r \right) \cdot \eta_r^2 \right] \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots (21^*)$$

bzw.

$$B(v_r) = [1 + 2(1 - \vartheta^2) \cdot v_r^2] \cdot [1 - \Phi(v_r)] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \quad \dots \dots (21)$$

Es ist zu beachten, daß in Gl. (20) die Größe δ die Gasdichte unmittelbar an der bewegten Wand und α die wahrscheinlichste Molekulargeschwindigkeit, wie sie dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz entspricht, an dieser Stelle bezeichnet. Beide Größen werden im allgemeinen von den entsprechenden, für das Gasvolumen hinter der Wand gültigen Mittelwerten abweichen und ihrerseits noch Funktionen der Wandgeschwindigkeit (v) sein.

Für $v_r = 0$ wird $B(0) = 1$ und der Gasdruck auf die ruhende Wand nach Gl. (20)

$$p_r = \frac{1}{2} \frac{\delta}{k} \cdot \frac{\alpha^2}{g} = \frac{R \cdot T}{k \cdot V} \quad \dots \dots (22),$$

worin R die allgemeine Gaskonstante und T die absolute Temperatur ist.

Für $v_r = \infty$ wird $B(\infty) = 0$, da $\Phi(\infty) = 1$, $(v_r \cdot e^{-v_r^2})_{v_r=\infty} = 0$ ist. Der Gasdruck p geht also mit wachsender Wandgeschwindigkeit asymptotisch gegen Null ($p = 0$).

Für $v_r = 1$ d. h. $v = \alpha$ wird

$$B(1) = [3 - (2 + \sigma^2) \cdot \eta_r^2] \cdot [1 - \Phi(1)] - \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot e} \cdot [1 - (2\sigma - \sigma^2) \cdot \eta_r^2] \quad \dots (23)$$

bzw.

$$B(1) = [3 - 2\vartheta^2] \cdot [1 - \Phi(1)] - \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot e} = 0,05679 - 0,31460 \cdot \vartheta^2.$$

Für das ideale Gas $\vartheta = 0$ wird insbesondere $B(1)_{id} = 0,05679$. Wenn also die Wandgeschwindigkeit (v) den Wert (α) der wahrscheinlichsten Molekulargeschwindigkeit erreicht, so ist der Gasdruck auf die Wand nur noch etwa 6% des Gasdruckes auf die ruhende Wand unter sonst gleichen Bedingungen, insbesondere also bei gleicher Dichte und Temperatur der Gasschicht an der bewegten und an der ruhenden Wand.

§ 4. Auswertung der charakteristischen Funktion $B(v_r)$

Um nun die Funktion $B(v_r)$ allgemein rechnerisch auszuwerten, nehmen wir noch einige zweckmäßige Umformungen und Festsetzungen vor. Wir beschränken uns dabei auf die einfachere Form der Funktion nach Gl. (21). Zunächst setzen wir zur Abkürzung (24) $1 - \Phi(v_r) = \Delta\Phi$; und zerlegen dann den Ausdruck (21) in zwei Teile:

$$B(v_r) = (1 + 2v_r^2) \Delta\Phi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} - 2\vartheta^2 v_r^2 \cdot \Delta\Phi \quad \dots \quad (25).$$

$$= B_0(v_r) - \vartheta^2 \cdot b(v_r)$$

Darin ist

$$B_0(v_r) = (1 + 2v_r^2) \cdot \Delta\Phi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \quad \dots \quad (26)$$

der Wert von $B(v_r)$ für das ideale Gas ($\vartheta = 0$), während

$$b(v_r) = 2v_r^2 \cdot \Delta\Phi \quad \dots \quad (27)$$

mit dem Faktor ϑ^2 die Korrekturgröße für die Abweichung des Gases vom idealen Zustand darstellt.

Für $k = 0$ d. i. $\vartheta^2 = 1$ nimmt $B(v_r)$ den Wert an:

$$B_1(v_r) = \Delta\Phi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \quad \dots \quad (28).$$

Für zwischen 0 und 1 liegende ϑ^2 -Werte ($0 \leq \vartheta^2 \leq 1$) können die zugehörigen B -Werte, wie Gl. (25) zeigt, durch einfache Interpolation zwischen den B_0 -Werten und B_1 -Werten nach ϑ^2 streng berechnet werden.

Nach der Formel (25) ist die Tabelle 1 der $B(v_r)$ -Werte berechnet worden. Die Kurven von Bild 1 stellen graphisch den Verlauf der Funktion dar. Für einen gegebenen ϑ -Wert wird stets für einen bestimmten endlichen v_{r_0} -Wert die Funktion $B(v_r) = 0$, während sich für größere

Tabelle 1.

v_r	v^2	$1 - \Phi(v_r)$	$\frac{2v_r^2}{(1 - \Phi(v_r))}$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} v_r \cdot e^{-v_r^2}$	$B(v_r)$ $\vartheta = 0$	$B(v_r)$ $\vartheta = 0,1$	$B(v_r)$ $\vartheta = 0,2$	$B(v_r)$ $\vartheta = 0,3$	$B(v_r)$ $\vartheta = 0,4$	$B(v_r)$ $\vartheta = 1$
0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1
0,1	0,01	0,88754	0,017751	0,11172	0,79357	0,79339	0,79286	0,79197	0,79073	0,77582
0,2	0,04	0,77730	0,062184	0,21683	0,62265	0,62203	0,62016	0,61706	0,61271	0,56047
0,3	0,09	0,67137	0,120847	0,30937	0,48285	0,48164	0,47802	0,47197	0,46353	0,36200
0,4	0,16	0,57161	0,182915	0,38462	0,36990	0,36807	0,36258	0,35344	0,34063	0,18699
0,5	0,25	0,47950	0,23975	0,43940	0,27985	0,27745	0,27026	0,25828	0,24150	0,04010
0,6	0,36	0,39614	0,28522	0,47235	0,20901	0,20616	0,19760	0,18334	0,16337	-0,07621
0,7	0,49	0,32220	0,31575	0,48390	0,15406	0,15090	0,14143	0,12564	0,10356	-0,16170
0,8	0,64	0,25790	0,33011	0,47598	0,11203	0,10873	0,09883	0,08232	0,05921	-0,21808
0,9	0,81	0,20309	0,32900	0,45176	0,08034	0,07705	0,06718	0,05073	0,02770	-0,24867
1,0	1,0	0,15730	0,31460	0,41511	0,05679	0,05364	0,04421	0,02848	0,00646	-0,25781
1,1	1,21	0,11979	0,28989	0,37012	0,03956	0,03666	0,02796	0,01346	(-0,00685)	-0,25033
1,2	1,44	0,08969	0,25831	0,32081	0,02719	0,02461	0,01686	0,00395	(-0,01414)	-0,23112
1,3	1,69	0,06690	0,22308	0,27068	0,01840	0,01677	0,00948	(-0,00168)	(-0,01729)	-0,20378
1,4	1,96	0,04772	0,18706	0,22252	0,01226	0,01039	0,00478	(-0,00458)	(-0,01767)	-0,17480
1,5	2,25	0,03390	0,15255	0,17840	0,00805	0,00652	0,00195	(-0,00568)	(-0,01636)	-0,14450
2,0	4,00	0,00468	0,03744	0,041333	0,00079	0,00042	(-0,00071)	(-0,00250)	(-0,00520)	-0,03665
2,5	6,25	0,0004070	0,0050875	0,005446	0,000049	0,0,2	(-0,00015)	—	—	-0,005039

v_r -Werte negative B -Werte ergeben, die keine praktische Bedeutung mehr haben. Es ist von Interesse, diese v_{r_0} -Werte in Abhängigkeit von ϑ zu ermitteln. Nach Gl. (25) kann man leicht die ϑ_0 -Werte berechnen, für die bei gegebenem v_{r_0} -Wert die Funktion $B(v_r)$ verschwindet, d. h. der Gasdruck auf die bewegte Wand Null wird:

$$\vartheta_0 = 1 + \frac{1}{2v_r^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot v_r \cdot e^{v_r^2} \cdot [1 - \Phi(v_r)]} \quad \dots \quad (29).$$

Die im Nenner des zweiten Bruches auftretende Größe $v_r \cdot e^{v_r^2} (1 - \Phi(v_r))$ hat eine grundlegende Bedeutung in der an anderer Stelle ⁵⁾ entwickelten gaskinetischen Theorie des Aus-

⁵⁾ Noch nicht veröffentlicht.

strömen von Gasen durch Blenden und ist mit $X(v_r)$ bezeichnet worden:

$$X(v_r) = v_r \cdot e^{v_r^2} \cdot [1 - \Phi(v_r)] \quad \dots \dots \dots (30).$$

Mit diesem Wert läßt sich Gl. (29) auch in folgender Form schreiben:

$$\vartheta_0^2 = 1 + \frac{1}{2v_r^2} - \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot X(v_r)}; \quad X(\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad \dots \dots \dots (31).$$

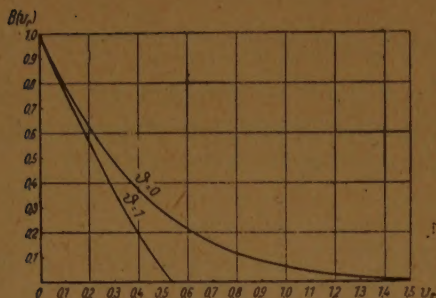


Bild 1

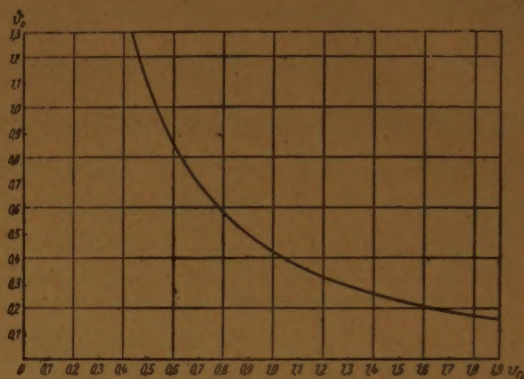


Bild 2

Nach vorstehender Gleichung ist die Tabelle 2 und die Kurve des Bildes 2 für die $X(v_r)$ - und ϑ_0 -Werte in Abhängigkeit von v_r berechnet worden. Man kann also mit Hilfe dieser Tabelle bzw. Kurve zu einem gegebenen Wert von ϑ bzw. k sofort denjenigen v_r -Wert finden, für den der Gasdruck auf die mit der Geschwindigkeit $v_0 = v_r \cdot \alpha$ bewegte Wand zu Null wird.

Tabelle 2

v_r	$\lg e^{v_r^2}$	$\lg v_r \cdot [1 - \Phi(v_r)]$	$\lg X(v_r)$	$\lg \sqrt{\pi} \cdot X$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot X(v_r)}$	$1 + \frac{1}{2v_r^2}$	ϑ_0^2	ϑ_0
0	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	—	—
0,05	0,0010857362	0,67377089—2	0,67485662—2	0,92343156—2	11,928	201	189,072	13,75
0,1	0,0043429448	0,94818650—2	0,06252944—1	0,30110438—1	4,9992	51	46,0008	6,782
0,2	0,0173717793	0,19161727—1	0,20898905—1	0,45756399—1	3,487	13,5	10,013	3,164
0,3	0,0390865034	0,30408535—1	0,34317185—1	0,59174679—1	2,5601	6,5556	3,9955	1,999
0,4	0,0694871171	0,35911635—1	0,42860347—1	0,67717841—1	2,1030	4,125	2,0220	1,422
0,5	0,1085736205	0,37975873—1	0,48833235—1	0,73690729—1	1,8328	3	1,1672	1,0804
0,6	0,1563460135	0,37600425—1	0,53235026—1	0,78092520—1	1,6560	2,3889	0,7329	0,8561
0,7	0,2128042961	0,35328237—1	0,56608667—1	0,81466161—1	1,5323	2,02040	0,4881	0,6986
0,8	0,2779484684	0,31438803—1	0,59233650—1	0,84091144—1	1,4424	1,78125	0,3388	0,5821
0,9	0,3517785303	0,26193490—1	0,61371343—1	0,86228837—1	1,3731	1,617284	0,2442	0,4942
1,0	0,4342944819	0,19672654—1	0,63102102—1	0,87959596—1	1,3195	1,5	0,1805	0,4249
1,1	0,5254963231	0,11983143—1	0,64532775—1	0,89390269—1	1,2767	1,41322	0,1365	0,3694
1,2	0,6253840539	0,03190594—1	0,65728999—1	0,90586493—1	1,2420	1,34722	0,1049	0,3239
1,3	0,7339576744	0,93343476—2	0,66739243—1	0,91596737—1	1,2135	1,29586	0,0824	0,2870
1,4	0,8512178453	0,82478209—2	0,67599927—1	0,92457421—1	1,1897	1,25510	0,0644	0,2538
1,5	0,9771625848	0,70622235—2	0,68338493—1	0,93195987—1	1,1696	1,22222	0,0526	0,2294
1,6	1,1117938767	0,57798065—2	0,68977452—1	0,93834946—1	1,1525	1,195312	0,0428	0,2070
1,7	1,2551110527	0,44022120—2	0,69533225—1	0,94390719—1	1,1379	1,1730104	0,0351	0,1873
1,8	1,4071141214	0,29307736—2	0,70019148—1	0,94876642—1	1,1252	1,1543210	0,0291	0,1707
1,9	1,5678030797	0,13666358—2	0,70446666—1	0,95304160—1	1,1142	1,1385042	0,0243	0,1560
2,0	1,7371779276	0,97105678—3	0,70823470—1	0,95680964—1	1,10406	1,125	0,02094	0,1448
2,5	2,7143405119	0,0075344—3	0,7218749—1	0,9704498—1	1,07041	1,08	0,00959	0,0979
3,0	3,9086503371	0,82151—5	0,73016—1	0,97873—1	1,05020	1,05556	0,00536	0,0732
3,5	5,3201074033	0,4151105—6	0,7352179—1	0,9837928—1	1,03802	1,040816	0,00279	0,0528
4,0	6,9487117105	0,79014—8	0,73885—1	0,98742—1	1,02940	1,03125	0,00185	0,0430
4,5	8,7944632585	0,94702—10	0,74148—1	0,99005—1	1,02318	1,024691	0,00151	(0,0388)
∞	∞	$-\infty$	0,75142506—1	0	1	1	0	0

Es sei nochmals besonders darauf aufmerksam gemacht, daß in der vorstehenden Theorie der Wert des Korrekturfaktors k

$$k = 1 + \vartheta = 1 + \frac{a \cdot \tau - \varepsilon \varrho}{L + \varepsilon \varrho}$$

für die Abweichung des Gases vom idealen Zustand als unabhängig von v_r vorausgesetzt ist. Dieses trifft in Wirklichkeit nicht zu und zwar selbst dann nicht, wenn die Dichte an der bewegten Wand konstant bleibt ($L = \text{const}$), da der Wert von τ stark temperaturabhängig ist und die Temperatur an der bewegten Wand sich im allgemeinen mit v_r verändern wird. Wir müssen also den k -Wert in unseren Formeln jeweilig durch einen geeigneten Mittelwert für das in Betracht kommende Intervall der v_r -Werte annähern.

Die Änderung des k -Wertes mit der Temperatur und Dichte des Gases folgt den folgenden einfachen Gesetzmäßigkeiten:

Mit zunehmender Temperatur nimmt $a \cdot \tau$ ab, mithin nimmt k mit zunehmender Temperatur stets ab.

Bei der Boyle-Temperatur ist insbesondere $a \cdot \tau = \varepsilon \rho$ und daher $k = 1, \vartheta = 0$. Das Gas folgt also bei dieser Temperatur wiederum dem Gesetz des idealen Gases.

Unterhalb der Boyle-Temperatur ist: $a \tau > \varepsilon \rho$ und $k > 1; \vartheta > 0$.

Mit zunehmender Dichte (d. i. abnehmendem L) nimmt k zu.

Oberhalb der Boyle-Temperatur ist $a \tau < \varepsilon \rho$ und $k < 1; \vartheta < 0$.

Mit zunehmender Dichte nimmt jetzt k ab.

Der k -Wert ändert sich also mit der Gasdichte stets so, daß mit zunehmender Dichte die Abweichungen vom idealen Gaszustand ($k = 1$) zunehmen und mit abnehmender Dichte abnehmen.

Der k -Wert nähert sich dem Wert Null ($k = 0$) um so mehr an, je höher die Temperatur und je höher die Gasdichte ist.

§ 5. Die Neigung der $B(v_r)$ -Kurve

Um die Größe des Druckabfalles in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Wand zu untersuchen, bilden wir die Ableitung der Funktion $B(v_r)$ nach v_r . Aus Gl. (21) folgt

$$\frac{dB(v_r)}{dv_r} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v_r^2} [1 - \sqrt{\pi} (1 - \vartheta^2) \cdot v_r \cdot e^{v_r^2} (1 - \Phi(v_r)) - \vartheta^2 \cdot v_r^2].$$

Wir bezeichnen diesen Neigungswert mit $\text{tg } \alpha$:

$$\text{tg } \alpha = \frac{dB(v_r)}{dv_r} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v_r^2} \cdot [1 - \vartheta^2 v_r^2 - (1 - \vartheta^2) \cdot \sqrt{\pi} \cdot X(v_r)]; \quad \vartheta^2 \leq \vartheta_0^2 \quad \dots (32),$$

Diese Gleichung hat praktische Bedeutung nur für ϑ^2 -Werte, die kleiner als ϑ_0^2 sind, wo ϑ_0^2 durch Gl. (31) gegeben ist.

Aus vorstehender Gleichung ersieht man sofort, daß der anfängliche Abfall des Druckes ($v_r = 0$) unabhängig von ϑ^2 den Wert

$$\text{tg } \alpha_0 = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} = -2,257; \quad v_r = 0; \quad \alpha_0 = 113^\circ 53' 55,6''$$

hat. Mit wachsendem v_r nimmt die Neigung der $B(v_r)$ -Kurve dann ständig ab. Für das ideale Gas ist insbesondere:

$$\text{tg } \alpha_i = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v_r^2} \cdot [1 - \sqrt{\pi} \cdot X(v_r)] \quad \dots (33),$$

während für ein Gas mit der Abweichung ϑ vom idealen Zustand eine Korrekturgröße hinzutritt, die wiederum proportional zu ϑ^2 ist.

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \alpha_i - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \vartheta^2 \cdot [\sqrt{\pi} \cdot X(v_r) - v_r^2] \cdot e^{-v_r^2} \quad \dots (34).$$

Schreiben wir den Ausdruck für $\text{tg } \alpha_i$ nach Gl. (33) in der Form:

$$\text{tg } \alpha_i = -\left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-v_r^2} - 4 v_r (1 - \Phi(v_r)) \right] = -\frac{2}{v_r} \cdot [1 - \Phi(v_r) - B_0(v_r)] \quad \dots (35),$$

so läßt er sich mit Hilfe der in Tabelle 1 enthaltenen Werte einfach und schnell berechnen. Die Korrekturgröße für die Abweichung ϑ vom idealen Gaszustand läßt sich dementsprechend in folgende Form bringen:

$$\Delta \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_i = 2 \vartheta^2 \cdot v_r \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} - 2(1 - \Phi(v_r)) \right], \quad \vartheta^2 \leq \vartheta_0^2 \quad (36)$$

$$= -2 v_r [B_0(v_r) + (1 - 2 v_r^2)(1 - \Phi(v_r))] \cdot \vartheta^2$$

Mit wachsender Abweichung ϑ^2 nimmt die Tangente ($\operatorname{tg} \alpha$) des Neigungswinkels also abnehmende negative Werte an. Die Druckabnahme wird für gleiche v_r -Werte um so stärker, je größer die Abweichung (ϑ^2) vom idealen Gaszustand ist.

Die Tabelle 3 gibt einige nach Gl. (35) berechnete Werte für $\operatorname{tg} \alpha_i$.

Tabelle 3

v_r	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	1,0	∞
$\operatorname{tg} \alpha_i$	-2,2568	-1,8794	-1,5465	-1,2568	-1,0085	-0,7986	-0,20122	0
α_i	113,9°	118,0°	122,9°	128,5°	143,7°	141,4°	168,6°	180°

§ 6. Der Gasdruck auf die bewegte Wand bei Kompression des Gases

Die Gleichungen (20) und (21) liefern auch sofort die Gesetzmäßigkeit für die Zunahme des Gasdrucks auf die bewegte Wand, wenn diese das Gasvolumen komprimiert. Man braucht in diesen Gleichungen nur v_r durch seinen negativen Wert ($-v_r$) zu ersetzen; denn die Integrale der Gl. (14) sind in diesem Falle von $-v_r$ bis $+\infty$ zu erstrecken, da auch noch die Moleküle gegen die Wand stoßen, welche eine von der Wand fortgerichtete Geschwindigkeitskomponente (x) haben, deren absolute Beträge kleiner als derjenige der Wandgeschwindigkeit v ist [$|x| \leq v$]. Man erhält daher jetzt für den Gasdruck die Gleichung:

$$p = \frac{\delta}{2k} \cdot \frac{\alpha^2}{g} \cdot B(-v_r);$$

$$B(-v_r) = [1 + \Phi(v_r)] \cdot [1 + 2(1 - \vartheta^2)v_r^2] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \quad \dots \dots (37),$$

worin wiederum $v_r = v : \alpha$ und v der absolute Betrag der Wandgeschwindigkeit ist.

Für den idealen Gaszustand vereinfacht sich die 2. Gleichung zu der Form:

$$B_0(-v_r) = [1 + \Phi(v_r)] \cdot [1 + 2v_r^2] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \quad \dots \dots (38).$$

Für $v_r = 0$ ergibt sich daraus wiederum der Wert $B(0) = 1$.

Tabelle 4

v_r	$1 + 2v_r^2$	$1 + \Phi(v_r)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2}$	$2v_r^2(1 + \Phi(v_r))$	$B_0(-v_r)$	$2(1 + 2v_r^2)$
0	1	1	0	0	1	2
0,1	1,02	1,11246	0,11172	0,0222492	1,24643	2,04
0,2	1,08	1,22270	0,21683	0,097816	1,53735	2,16
0,3	1,18	1,32863	0,30937	0,239153	1,87715	2,36
0,4	1,32	1,42830	0,38462	0,457085	2,27009	2,64
0,5	1,50	1,52050	0,43940	0,76025	2,72015	3,00
0,6	1,72	1,60386	0,47235	1,15478	3,23099	3,44
0,7	1,98	1,67780	0,48390	1,64424	3,80594	3,96
0,8	2,28	1,74210	0,47598	2,22989	4,44797	4,56
0,9	2,62	1,79691	0,45176	2,91099	5,15966	5,24
1,0	3,00	1,84270	0,41511	3,68540	5,94321	6,00
1,1	3,42	1,88021	0,37012	4,55011	6,80044	6,84
1,2	3,88	1,91031	0,32081	5,50169	7,73281	7,76
1,3	4,38	1,93401	0,27068	6,53695	8,74164	8,76
1,4	4,92	1,95228	0,22252	7,65294	9,82774	9,84
1,5	5,50	1,96610	0,17840	8,84745	10,99195	11
2,0	9,00	1,9953223	0,041333	15,962579	17,999234	18
2,5	13,5	1,9995930	0,005446	24,9949125	26,999952	27

Für $v_r = \infty$ geht jetzt $B_0(\infty)$ mit $1 + 2v_r^2$ gegen unendlich. Für hinlänglich große v_r -Werte ($v_r \gtrsim 1,5$) wird jetzt allgemein mit großer Annäherung

$$B(-v_r) = 2[1 + 2(1 - \vartheta^2)v_r^2]; \quad v_r \gtrsim 1,5 \quad \dots \quad (39).$$

Für den speziellen Wert $v_r = 1,5$ wird der Fehler der vereinfachten Berechnung nach vorstehender Formel bereits kleiner als 1% , der genaue Wert beträgt $B(-1,5) = 10,99195$, während sich aus der Gl. (39) berechnet $B(-1,5) = 11$. Für $v_r = 1$ bleibt der Fehler noch unter 1% .

Voraussetzung für die Berechnung des Druckes nach der Gl. (37) ist wiederum, daß die Größen δ und α^2 , d. h. die Dichte und Temperatur des Gases unmittelbar an der bewegten Wand in jedem Augenblick gegeben sind. Allgemein kann man die von unserer Theorie gelieferte Funktion $B(v_r)$ in ihrer Bedeutung folgendermaßen klarstellen:

Wenn eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Wand, durch die das Gas entweder expandiert oder komprimiert wird, plötzlich festgehalten wird, ihre Geschwindigkeit also momentan zu Null wird, so ändert sich der Gasdruck auf die Wand im gleichen Moment im Verhältnis $B(v_r) : 1$. Im nächsten Augenblick wird sich dann dieser Druck natürlich im allgemeinen noch weiterhin ändern, da infolge der im Gasraum vorhandenen Strömungsvorgänge sich die Dichte (δ) und die Temperatur (α^2) an der Wand noch verändern werden, und zwar erfolgt diese Änderung nach einer grundsätzlich anderen Gesetzmäßigkeit, wie sie durch die Funktion $B(v_r)$ dargestellt wird.

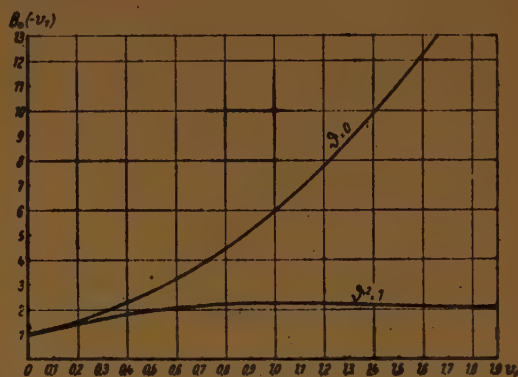


Bild 3

Tabelle 4 enthält die nach Gl. (38) berechneten Werte für $B_0(-v_r)$. Die für die Abweichung vom idealen Gaszustand erforderliche Korrektur der B_0 -Werte beträgt:

$$\Delta B = B(-v_r) - B_0(-v_r) = -2v_r^2[1 + \Phi(v_r)] \cdot \vartheta^2 \quad \dots \quad (40).$$

Für den Wert $\vartheta^2=1$ geht $B(-v_r)$ schnell gegen den Grenzwert 2, nachdem es für $v_r = 1,0$ das Maximum $B_1(-1) = 2,25781$ erreicht hat. Bild 3 zeigt die zugehörigen Kurven.

§ 7. Zum Widerstand bewegter Flächen

Ich weise noch auf die besondere Bedeutung der vorstehenden Theorie für den Widerstand der in Gasen bewegten Flächen insbesondere auch für fliegende Geschosse hin, denn bei letzteren treten Werte von v_r auf, die beträchtlich über die Einheit hinausgehen können. Die Theorie zeigt, daß das gebräuchliche quadratische Luftwiderstandsgesetz offenbar nur ein idealisiertes Grenzgesetz ist, und daß mit besserer Annäherung für sehr hohe Geschwindigkeiten der Widerstand proportional zu $1 + 2(1 - \vartheta^2) \cdot v_r^2$ gesetzt werden kann.

Allgemein erhält man den Widerstand $W(v_r)$ einer in einem Gase bewegten Fläche (Körpers) durch die Differenz der Gasdrucke auf die Vorder- und Hinterseite der Fläche. Bezeichnen wir in den obigen Gleichungen die Größen, die sich auf das komprimierte Gas an der Vorderseite beziehen, mit dem Index c und diejenigen Größen, die sich auf das expandierte Gas an der Rückseite der Fläche beziehen, mit dem Index e , so läßt sich der Widerstand $W(v_r)$ der bewegten Fläche in Abhängigkeit von seiner Geschwindigkeit (v_r) allgemein darstellen durch die Differenz der beiden Gleichungen (37) und (20). Wir setzen darin noch:

$$\frac{\delta}{2k} \cdot \frac{\alpha^2}{g} = F_r \quad \dots \quad (41).$$

$$W(v_r) = F_c - F_e = p_{r,c} \cdot B(-v_r) - p_{r,e} \cdot B(v_r) \quad \dots \quad (42),$$

worin

$$\left. \begin{aligned} B(-v_r) &= [1 + 2(1 - \vartheta_c^2) \cdot v_r^2] \cdot (1 + \Phi(v_r)) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \\ B(v_r) &= [1 + 2(1 - \vartheta_e^2) \cdot v_r^2] \cdot (1 - \Phi(v_r)) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot v_r \cdot e^{-v_r^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (43),$$

ist.

Aus diesen Gleichungen kann man zwei Grenzesetze für den Widerstand ableiten und zwar einmal bei sehr kleinen Geschwindigkeiten ($v_r \ll 1$), wenn die Änderung des Gaszustandes (p_r) an der bewegten Wand sowohl auf der Vorder- wie auch auf der Rückseite vernachlässigt, also $p_{re} = p_{rs} = p_r$ gesetzt werden kann. Für diesen Fall ergibt sich der Widerstand zu

$$W(v_r) = p_r \cdot [B(-v_r) - B(v_r)] \dots \dots \dots (44).$$

Es ist aber:

$$B(-v_r) - B(v_r) = 2 [1 + 2(1 - \vartheta_c^2) \cdot v_r^2] \cdot \Phi(v_r) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_r \cdot e^{-v_r^2}$$

und daher:

$$W(v_r) = 2 p_r \cdot [(1 + 2(1 - \vartheta_c^2) \cdot v_r^2) \Phi(v_r) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_r \cdot e^{-v_r^2}] \quad v_r \ll 1 \quad \dots \dots (45).$$

Die zweite Vereinfachung ergibt sich für hinlänglich große Geschwindigkeiten ($v_r \geq 1$), da dann der Druck auf die Rückseite der Fläche gegenüber dem Druck auf die Vorderseite vernachlässigt und gleich Null gesetzt werden kann. $B(v_r) = 0$. Dann nimmt die Widerstandsfunktion folgende Form an

$$W(v_r) = p_r B(-v_r) = p_{re} [(1 + \Phi(v_r)) (1 + 2(1 - \vartheta_c^2) v_r^2) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_r \cdot e^{-v_r^2}] \quad v_r \geq 1 \quad (46).$$

Da darin $\Phi(v_r)$ sehr nahe gleich der Einheit geworden ist und $v_r \cdot e^{-v_r^2}$ bereits kleine Werte hat, so kann praktisch noch einfacher geschrieben werden

$$W(v_r) = 2 p_{re} [1 + 2(1 - \vartheta_c^2) \cdot v_r^2]; \quad v_r \geq 1,5 \quad \dots \dots \dots (47).$$

Dabei ist zu beachten, daß der Wert von ϑ_c^2 infolge der starken Kompression der Gasschicht vor der bewegten Fläche bei sehr hohen (Überschall-) Geschwindigkeiten größere Werte, die sich der Einheit annähern, erreichen kann, so daß der Widerstand wesentlich langsamer, als es dem Quadrate der Geschwindigkeit (v_r^2) entspricht, zunehmen muß.

Für das zwischenliegende Intervall der v_r -Werte ($0,01 \leq v_r \leq 1$) ist ein genaueres Widerstandsgesetz nur unter Berücksichtigung der Änderung der Gasdichte (δ) und der Temperatur in der Gasschicht an der bewegten Fläche zu gewinnen.

Anhang

Die vorstehend entwickelte Theorie liefert nebenbei noch eine sehr einfache und zweckmäßige Näherungsformel zur Berechnung des Gaußschen Fehlerintegrals $\Phi(x)$ für große Werte des Arguments. Wie Tabelle 1 zeigt, nimmt der Wert der Funktion $B(v_r)$ mit wachsendem Argument sehr schnell ab und ist bereits für $v_r = 2,5$ kleiner als 10^{-4} . Daher erhält man aus Gl. (26) eine sehr einfache Gleichung zur Berechnung der Φ -Funktion für größere Argumente, wenn man darin $B = 0$ setzt. So folgt:

$$\Phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{1 + 2x^2} \cdot e^{-x^2}; \quad x \geq 2,5.$$

Nach dieser Gleichung sind einige $\Phi(x)$ -Werte berechnet und in der nachstehenden Tabelle 5 zum Vergleich mit Werten, die einer Funktionstabelle der Φ -Werte entnommen sind, zusammengestellt.

Tabelle 5

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$1 - \Phi(x)$ berechnet	$4,593 \cdot 10^{-3}$	$4,034 \cdot 10^{-4}$	$2,199 \cdot 10^{-5}$	$7,411 \cdot 10^{-7}$	$1,539 \cdot 10^{-8}$	$1,964 \cdot 10^{-10}$	$1,5364 \cdot 10^{-11}$
$1 - \Phi(x)$ nach Tabelle	$4,678 \cdot 10^{-3}$	$4,070 \cdot 10^{-4}$	$2,21 \cdot 10^{-5}$	$7,431 \cdot 10^{-7}$	$1,542 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-10}$	—

Eingegangen: 24. 11. 1948.

Der Propeller als rotierende Schallquelle

Von H. Merbt und H. Billing in Göttingen

Es werden Methoden entwickelt zur Berechnung des Schallfeldes rotierender Luftschrauben in Abhängigkeit von den geometrischen Abmessungen, Drehzahl, Anstellwinkel und Fortschrittsgrad der Luftschrauben. Die theoretischen Ergebnisse werden mit Ernsthause's Messungen an Modellluftschrauben verglichen.

Methods are developed to calculate the field of sound of rotating air screws dependent on the geometrical data, number of revolution, angle of incidence and ratio of advance of the screws. The theoretical results are compared with Ernsthause's measurements on model screws.

On développe des méthodes pour calculer le champ de son d'hélices en fonction des données géométriques, du nombre de révolutions, de l'angle d'incidence et de l'argument de similitude des hélices. Les résultats théorétiques sont comparés avec les mesures d'Ernsthause faites à des modèles d'hélices.

Разрабатываются методы расчета звукового поля вращающихся воздушных винтов в зависимости от геометрических данных, от числа оборотов, от угла атаки и шага винта. Теоретические результаты сравниваются с результатами испытаний Эрнстгаузена на моделях воздушных винтов.

1. Problemstellung und Differentialgleichung

Die folgenden Ausführungen sind im wesentlichen in den letzten Kriegsjahren erarbeitet und bisher lediglich in einer Reihe von noch unzugänglichen Berichten niedergelegt [1].

Zahlreiche Messungen an Flugzeugen und Modellschrauben haben gezeigt, daß sich der Propellerschall im wesentlichen aus zwei separaten Anteilen zusammensetzt, dem durch Wirbelablösung am Schraubenblatt erzeugten Drehgeräusch und dem sogenannten Drehklang. Dieser besteht aus einer Reihe von harmonischen Teiltönen und hat seine Ursache in einem mit dem Propeller umlaufenden Druckfeld. Da das Wirbelgeräusch wegen seiner geringen Stärke und seiner hohen Frequenzen in der Luft schnell absorbiert wird, beschränken wir uns — wie die bisherigen theoretischen Arbeiten über Propellerschall — auf die mathematische Behandlung des Drehklanges.

Zwei Gründe für die Entstehung des Propellerklanges sieht man unmittelbar, wenn man ein Raumelement betrachtet, durch welches ein Propellerblatt hindurchschlägt. Einmal wird durch das Propellerblatt die Luft verdrängt, und zwar nach beiden Seiten gleichmäßig. Diese Verdrängungswirkung hängt praktisch nur von der Dicke und Tiefe des Propellerprofils ab und führt akustisch gesprochen zu Nullstrahlern. Zweitens erteilt der Vortriebspropeller dem Luftelement einen Impuls in Richtung der Propellerachse. Dieser gerichtete Impuls, der jedoch nur bei belasteten Propellern auftritt, führt akustisch zu Strahlern erster Ordnung. Es erweist sich nun als sehr nützlich, auch in der mathematischen Behandlung die Verdrängungswirkung und die Schubwirkung gesondert zu berechnen und dementsprechend das Schallfeld aus der Wirkung eines unangestellten dicken und eines angestellten unendlich dünnen Propellerblattes zusammenzusetzen. Der mathematische Grund zu dieser Aufteilung ist unmittelbar klar: Um den unangestellten dicken Propellerflügel bildet sich keine Zirkulation aus, wenn man von der das Wirbelgeräusch erzeugenden relativ schwachen Verwirbelung absieht. Hier gilt mithin mit Ausnahme des Propellerortes im ganzen Raum für das Geschwindigkeitspotential φ die homogene Wellengleichung

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (1).$$

Hinter dem angestellten Propeller hingegen ist im gesamten Bereich des Propellerstrahles rot $v \neq 0$. Es muß daher mit Druckpotentialen gerechnet werden, wie vom zweitgenannten Verfasser in [2] ausgeführt wurde. Um Druckpotentiale anwenden zu können, soll die Gültigkeit der Wellengleichung (1) für den Schalldruck im gesamten Raum um den angestellten Propeller zunächst vorausgesetzt werden

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \dots \dots (2).$$

Gl. (2) ist jedoch gemäß [2] nur dann im ganzen Raum erfüllt, wenn die Felder der vom Propeller erzeugten freien Wirbel zeitlich stationär und raumfest angesetzt werden dürfen. In der Praxis sind beide Voraussetzungen nicht exakt erfüllt, da die im Propellerstrahl auftretenden Wirbel zusätzlich mit der Strahlgeschwindigkeit nach hinten abschwimmen und sich auflösen. Die Strahlgeschwindigkeiten sind jedoch im Fall des fliegenden Flugzeuges stets klein im Vergleich mit der Fluggeschwindigkeit, außerdem nimmt die Zusatzgeschwindigkeit im Propellerstrahl mit anwachsender Vorwärtsgeschwindigkeit (bei konstant gehaltenem Schub) ab. Bei der Berechnung des Schallfeldes vorwärts bewegter Propeller kann deshalb von der zusätzlichen Bewegung der Wirbel im Strahl abgesehen werden. Die Gültigkeit der Gl. (2) läßt sich dann für den ganzen Raum voraussetzen.

Bei der Schallfeldberechnung eines im Stand laufenden Propellers führt dagegen die Vernachlässigung der Zusatzgeschwindigkeiten im Strahl zu erheblichen Fehlern, doch kann man, auch in diesem Fall mit Hilfe einer Theorie höherer Näherung brauchbare Ergebnisse erzielen, wie später gezeigt wird.

Zur Berechnung des Schallfeldes einer Luftschraube wird die Singularitätenmethode verwendet. Dazu müssen zunächst kreislinig bzw. schraubenlinig umlaufende Singularitäten konstanter Ergiebigkeit berechnet werden, um mit ihnen die Randbedingungen am Propellerblatt zu erfüllen.

Für den unangestellten Propeller wird als Randbedingung die Normalgeschwindigkeit am Propellerblatt gewählt. Es genügt dabei, in der folgenden Rechnung das genaue Flügelprofil durch einen einfachen Quell-Senkenkörper von gleicher Dicke und Tiefe zu ersetzen. Eine gegenseitige Beeinflussung der unangestellten Propellerblätter bleibt bei dieser Näherungsrechnung unberücksichtigt.

Als Randbedingung für den angestellten Propeller ebenfalls die Normalgeschwindigkeit zu nehmen und diese Randbedingung wie in [2] mittels Drucksingularitäten zu befriedigen, ist bisher noch nicht versucht worden und erscheint recht schwierig. Leichter gangbar erweist sich der folgende Weg:

Mittels der jetzt gut ausgearbeiteten Propellertheorie errechnet man sich unter Benutzung der Wirbeltheorie die Wirbelbelegung und damit die Auftriebsverteilung längs des gesamten Propellerblattes. Damit steht als Randbedingung der Drucksprung am Propellerblatt zur Verfügung. Zur Berechnung des Schallfeldes braucht man dann lediglich die nach der Propellertheorie berechnete Wirbelbelegung durch eine proportionale Belegung mit Drucksingularitäten zu ersetzen und über die Belegung zu integrieren (vgl. [2]). Die Drucksingularitäten laufen dabei mit dem Propellerblatt um. Die Genauigkeit der Schallfeldberechnung hängt für den angestellten vorwärtsbewegten Propeller dann im wesentlichen nur von der Güte der Rechenmethode ab, mit deren Hilfe die Auftriebsverteilung am Propellerblatt bestimmt wird. Für den akustischen Teil der Rechnung wird als einzige zusätzliche Voraussetzung die Gültigkeit der Wellengleichung (2) im gesamten Raum außerhalb der Propellerblätter benötigt.

Gl. (1) und (2) werden sicherlich ungültig beim Auftreten von Verdichtungsstößen. Eine etwaige Anwendung der im folgenden abgeleiteten Formeln auf Propeller, deren Spitzen mit Überschallgeschwindigkeiten umlaufen, erscheint deshalb gefährlich und ist noch nicht näher diskutiert.

2. Kreis- und schraubenlinig bewegte Singularitäten

Zur Berechnung des Feldes kreis- bzw. schraubenlinig bewegter Punktsingularitäten sind verschiedene Ansätze versucht worden. Eine Ausnützung der Invarianz der Wellengleichung gegenüber der Transformationsgruppe der konformen Abbildung des vierdimensionalen Raumes, welcher Weg sich in [2] für die geradlinig gleichförmige Bewegung als so besonders elegant erwiesen hat, ist nicht möglich. Es steht für die Kreisbewegung keine geeignete Transformation zur Verfügung.

Ein für die Kreisbewegung zum Ziel führender Ansatz von Ernsthausen [3] belegt die Kreisbahn dicht mit ruhenden Elementarstrahlern, die jeweils nacheinander beim Durchgang der bewegten Singularität einen kurzen endlichen Störimpuls aussenden. Die Größe und Dauer des Impulses richtet sich nach den vorgegebenen Randbedingungen, die erfüllt werden sollen. Man erhält eine Aufspaltung in harmonische Teilschwingungen, wenn man den zeitlichen Störungsverlauf am Ort eines Elementarstrahlers in Form eines Fourier-Spektrums darstellt. Für die Berechnung des Potentials in einem beliebigen Aufpunkt müssen dann die Wirkungen aller Einzelstrahler phasenrichtig addiert werden.

Wir wollen diesen anschaulichen, aber mathematisch etwas umständlichen Weg hier nicht weiter verfolgen, sondern für eine zunächst ganz allgemeine Quellbewegung ausgehen von der klassischen Wellengleichung d'Alemberts

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = g(x, y, z, t) \dots \dots \dots (3).$$

Darin ist χ ein beliebiges Potential und $g(x, y, z, t)$ bedeutet die die Störung verursachende Quellverteilung. Eine Lösung von (3) ist nach Poisson

$$\chi(x, y, z, t) = \int_V \frac{g\left(x, y, z, t - \frac{r'}{c}\right)}{r'} dV \dots \dots \dots (4).$$

Darin bedeutet r' den jeweiligen Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt zur retardierten Zeit $t - \frac{r'}{c}$. Zu integrieren ist über den gesamten zur retardierten Zeit von Quellen besetzten Raum. Die Integration ist im allgemeinen sehr schwierig, da Lösungen gesucht werden, die den Quellort und das gesamte Feld der Störung zur Aufpunktszeit t angeben.

Für eine Quelle konstanter Ergiebigkeit, welche auf einer beliebigen, in sich geschlossenen Bahn mit gleichförmiger Geschwindigkeit umläuft, hat Schott [4] eine elegante Umformung der Poisson'schen Lösung (4) angegeben, welche von Küssner [5] für die Theorie des Propellerschalles nutzbar gemacht worden ist. Schott entwickelt in der Poisson'schen Lösung für die mit der Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodisch bewegte Singularität die Quellverteilung $g\left(t - \frac{r'}{c}\right)$ in eine Fourierreihe zu.

$$g\left(t - \frac{r'}{c}\right) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{im\omega t} \dots \dots \dots (5).$$

Dabei ist

$$\alpha_m = \frac{1}{T} \int_0^T g\left(t - \frac{r'}{c}\right) e^{-im\omega t} dt \dots \dots \dots (6)$$

oder mit $\tau = t - \frac{r'}{c}$ unter Ausnutzung der Periodizität von $g(x, y, z, t)$

$$\alpha_m = \frac{1}{T} \int_0^T g(\tau) e^{-im\omega\left(\tau + \frac{r'}{c}\right)} d\tau \dots \dots \dots (7).$$

Damit wird (5)

$$g\left(t - \frac{r'}{c}\right) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^T e^{im\omega\left(t - \frac{r'}{c} - \tau\right)} g(\tau) d\tau \dots \dots \dots (8).$$

Die Integration über die retardierten Zustände ist dabei ersetzt durch eine Integration über eine ganz Periode der Bewegung. Beachtet man weiter, daß die gesamte Quellstärke konstant bleibt, so folgt schließlich aus (4) und (8) das Potential für eine periodisch mit der Periode T bewegte Quelle konstanter Quellergiebigkeit C

$$\chi = \frac{C}{2\pi T} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^T e^{\frac{2\pi i m}{T} \left(t - \frac{r'}{c} - \tau\right)} \frac{d\tau}{r'} \dots \dots \dots (9).$$

Der Strich bei Σ' bedeutet, daß für $m = 0$ nur die Hälfte des Wertes einzusetzen ist; m gibt die Ordnungszahl der Schwingung; r' ist der Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt zur Zeit τ und für die Kreisbewegung leicht in Abhängigkeit von τ anzugeben. Dazu sind mit Küssner [5] der Aufpunkt und der Quellpunkt in Zylinderkoordinaten gegeben zu

$$\left. \begin{array}{lll} x & y = s \sin \psi & z = s \cos \psi \\ x_1 & y_1 = R \sin (\omega \tau + \delta) & z_1 = R \cos (\omega \tau + \delta) \end{array} \right\} \dots \dots (10).$$

Das Quadrat des Abstandes zwischen diesen beiden Punkten ist

$$\left. \begin{array}{l} r'^2 = r_s^2 - 2 R s \cos (\omega \tau + \delta - \psi) \\ r_s^2 = (x - x_1)^2 + s^2 + R^2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (11).$$

Führt man noch die dimensionslosen Parameter

$$\frac{r_s \cdot \omega}{c} = \alpha \quad \frac{R \cdot s}{r_s^2} = \sigma \dots \dots \dots (12)$$

ein und setzt $\omega \tau + \delta - \psi = \zeta$, so folgt aus (9) als retardiertes Potential für eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis vom Radius R umlaufende Punktquelle

$$\chi = \frac{C}{2\pi r_s} \sum_{m=0}^{\infty} h_m(\alpha, \sigma) \exp [im(\omega t + \delta - \psi)] \dots \dots \dots (13).$$

Dabei ist

$$h_m(\alpha, \sigma) = \frac{r_s}{T} \int_0^T \exp \left[\frac{2\pi i m}{T} \left(-\tau - \frac{r'}{c} \right) \right] \frac{d\tau}{r'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp [i m (-\zeta - \alpha \sqrt{1 - 2\sigma \cos \zeta})]}{\sqrt{1 - 2\sigma \cos \zeta}} d\zeta \quad (14).$$

Für die Propellertheorie benötigt man das Potential für z äquidistant auf derselben Kreisbahn bewegte Quellen. Man setzt dann in (13) für den Phasenwinkel der k -ten Quelle

$$\delta_k = \frac{2\pi k}{z} + \delta \quad k = 1, 2, \dots, z \quad (15)$$

und summiert über k . Dabei ist, wie man leicht einsieht,

$$\sum_{k=1}^z \exp \left[\frac{2\pi i m}{z} k \right] = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 0 \pmod{z} \\ z & \text{für } m = 0 \pmod{z} \end{cases} \quad (16).$$

Damit folgt aus (13) für das Potential von z Quellen, die sich äquidistant auf derselben Kreisbahn bewegen

$$\chi_z = \frac{Cz}{2\pi r_s} \sum_{m=0}^{\infty} h_{mz}(\alpha, \sigma) \exp [i m z (\omega t + \delta - \psi)] \quad (17).$$

Für die Funktionen h_{mz} sind in [6] Reihenentwicklungen angegeben worden, die eine Berechnung der Potentiale gestatten.

Betrachtet man weit entfernte Aufpunkte (Abstand > 5 Bahndurchmesser), so können wir in (14) näherungsweise setzen

$$\begin{aligned} \text{im Zähler} \quad & \sqrt{1 - 2\sigma \cos \zeta} \sim 1 - \sigma \cos \zeta \\ \text{im Nenner} \quad & \sqrt{1 - 2\sigma \cos \zeta} \sim 1 \end{aligned}$$

und, da $R^2 \ll (x - x_1)^2 + s^2 = r^2$ ist, folgt $\frac{s}{r_s} \approx \frac{s}{r} = \cos \Theta$, $\frac{x - x_1}{r_s} \approx \frac{x - x_1}{r} = \sin \Theta$ (Θ = Breitenwinkel des Aufpunktes).

Führt man noch die M a c h'sche Zahl $M_R = \frac{\omega R}{c}$ ein, so erhält man als Näherungslösung für das Fernfeld von z kreislinig bewegten Punktquellen

$$\chi_z = \frac{Cz}{2\pi r} \sum_{m=0}^{\infty} i^{mz} J_{mz} (mz M_R \cos \Theta) \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \quad (18)$$

(J_{mz} = Besselsche Funktionen).

Für die Propellertheorie benötigt man weiter Lösungen für kreislinig bewegte Quell-Senken-Anordnungen und Dipole. Man erhält sie in einfacher Weise durch Differentiationen aus den bereits abgeleiteten Formeln (17) und (18). Ordnet man den z umlaufenden Quellen z um den Phasenwinkel δ verschobene Senken zu und geht zum Dipol über, so wird das Fernfeld für z solche auf einer Kreisbahn umlaufende Quell-Senken-Anordnungen

$$\chi_1 = \frac{\partial \chi_z}{\partial \delta} d\delta = \frac{z^2 C_1 d\delta}{2\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} m i^{mz+1} J_{mz} (mz M_R \cos \Theta) \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \quad (19).$$

Ebenso ergibt sich für z kreislinig umlaufende Dipole mit ihrer Achse senkrecht zur Anströmung in Richtung der x -Achse das Potential

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \frac{\partial \chi_z}{\partial x_1} dx_1 = \\ &= \frac{z^2 C_1 dx_1 \omega}{2\pi r} \frac{1}{c} \sin \Theta \sum_{m=1}^{\infty} m i^{mz+1} J_{mz} (mz M_R \cos \Theta) \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta + \psi}{\omega} \right) \right] \quad (20) \end{aligned}$$

(quadratisch mit dem Abstand abnehmende Glieder sind hierin vernachlässigt).

Um schließlich aus der Kreisbewegung Lösungen für schraubenlinig bewegte Singularitäten zu erhalten, braucht man lediglich gemäß [2] die Gleichungen (17) und (18) einer L o r e n t z-Transformation zu unterwerfen. Wendet man die dort für den ruhenden Beobachter angegebenen Transformationsformeln

$$x = \frac{x' + V t'}{\kappa^2} \quad y = \frac{y'}{\kappa} \quad z = \frac{z'}{\kappa} \quad t = \frac{t' - \frac{V x'}{c^2}}{\kappa^2} \quad \text{mit } \kappa^2 = 1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2 \quad (21)$$

auf die Nahfeldgleichung (13) an, so folgt der Ort der singulären Stelle aus der Nullstelle des Integranden von (14) zu

$$\begin{aligned} s' &= R' \\ \cos \zeta &= 1, \text{ d. h. } \omega \tau + \delta = \psi \quad \dots \quad (22), \\ x' &= x_1 - V_x t' \end{aligned}$$

d. h. die Quelle bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit dem Radius $R' = R \cdot \kappa$ und gleichzeitig mit der Geschwindigkeit V_x in der Richtung der negativen x -Achse. Der Fortschrittsgrad der Quelle beträgt $\lambda = \frac{V_x}{R' \omega} = \frac{V_x}{\kappa R \omega}$. Mit der in [2] abgeleiteten Lorentz-Transformation für den mitbewegten Beobachter

$$x = \frac{x'}{\kappa^2} \quad y = \frac{y'}{\kappa} \quad z = \frac{z'}{\kappa} \quad t = t' + \frac{x' M}{c \kappa^2} \quad \text{mit} \quad M = \frac{V}{c} \quad \dots \quad (23)$$

ergibt sich aus (18) das Potential für z schraubenlinig bewegte Quellen konstanter Ergiebigkeit C bei großer Aufpunktsentfernung zu

$$\begin{aligned} \chi_z' &= \frac{C' z}{2 \pi r' \cos \Theta' \sqrt{tg^2 \Theta' + \kappa^2}} \\ \sum_{m=0}^{\infty} i^m z J_{mz} \left(\frac{m z M_R}{\sqrt{tg^2 \Theta' + \kappa^2}} \right) \exp \left[i m z \omega \left(t' + \frac{M(x' - x_1) - \sqrt{(x' - x_1)^2 + \kappa^2 s'^2}}{\kappa^2 c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \quad (24). \end{aligned}$$

Dabei ist M_R die M a c h'sche Zahl der Projektion der Quelle in die y, z -Ebene, $M = \frac{V_x}{c}$ die M a c h'sche Zahl der Quellprojektion auf die x -Achse, $\kappa^2 = 1 - M^2$.

Wie man leicht einsieht, gelten die Formeln — ebenso wie alle bisher abgeleiteten — sowohl für umlaufende Singularitäten des Geschwindigkeits- als auch des Beschleunigungspotentials. Sie sind also zur Darstellung des nicht angestellten Propellers wie auch des angestellten Propellers geeignet.

3. Drehklang von Luftschrauben

a) Der nicht angestellte Propeller im Standlauf

Um die Strömung um den nicht angestellten Propeller nachzubilden, müßte man den Propeller in solcher Weise mit kreislinig umlaufenden Quellen und Senken des Geschwindigkeitspotentials besetzen, daß an den Propellerblättern die Randbedingung für die Normalgeschwindigkeit erfüllt wird. Als ausreichende Näherung erweist es sich jedoch, die Quellsenkenverteilung durch eine Belegung des Propellerflügelrandes mit einer Quell- und einer gleichstarken Senkenlinie zu ersetzen. Der Winkelabstand zwischen diesen beiden Linien beträgt beim Radius R : $\frac{l}{R} = d \delta$ ($l(R)$ = Tiefe des Propellerblattes). Die Intensität C_1 der Quellbelegung beim Radius R bestimmt man aus der Dicke $D(R)$ des Propellerprofils bei Rechnung in ebener Näherung (Streifen-theorie)¹⁾ zu

$$C_1 = D V = D R \omega \quad \dots \quad (25).$$

Schließlich kann man bei nicht zu tiefen Profilen für die ersten Harmonischen unter Beibehaltung des Momentes $C_1 d \delta = D l \omega$ die Quell- und Senkenlinie zusammenfallen lassen, also zur Dipolbildung übergehen und erhält durch Einsetzen von Gl. (25) in Gl. (19) und Integration über den Radius als Geschwindigkeitspotential für das Feld eines z -flügeligen nicht angestellten Propellers

$$\varphi_1 = \frac{z^2 \omega}{2 \pi r} \sum_{m=1}^{\infty} m i^{m+1} \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \int_0^{R_S} J_{mz} (m z M_R \cos \Theta) l D dR \quad (26).$$

Setzt man $D = \bar{D}$ und $d \delta = \frac{\bar{l}}{R_S}$ (\bar{l} = mittlere Flügeltiefe) über den Propellerradius konstant und substituiert in (26)

$$x = m z \frac{\omega R}{c} \cos \Theta \quad \xi = m z \frac{\omega R_S}{c} \cos \Theta,$$

so vereinfacht sich die Gleichung (26) zu

$$\varphi_1 = \frac{z^2 c}{2 \pi r} \bar{D} \bar{l} M_{R_S} \sum_{m=1}^{\infty} m i^{m+1} \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \frac{1}{\xi^2} \int_0^{\xi} J_{mz}(x) x dx \quad \dots \quad (27).$$

¹⁾ Vgl. z. B. Prandtl: Strömungslehre.

b) Der angestellte Propeller im Standlauf (1. Näherung)

In den folgenden Abschnitten wird die Gültigkeit der Wellengleichung (2) für den ganzen Raum außerhalb der Propellerblätter vorausgesetzt, der Einfluß der Zusatzgeschwindigkeiten im Schraubenstrahl also vernachlässigt. Für den im Stand laufenden Propeller fällt diese Vernachlässigung durchaus ins Gewicht. Gleichung 29), (30) und (33) sind deshalb nur als erste Näherung zu bezeichnen.

Um unter diesen Voraussetzungen das Schallfeld eines angestellten Propellers zu berechnen, ermittelt man mittels der Propellertheorie zunächst die Zirkulationsverteilung über den Propellerradius. Darauf belegt man den Propellerradius so mit Druckdipolen (Dipolachse in Richtung der Propellerachse, d. h. x -Achse), daß die Querkraft auf ein Element der Dipollinie gleich der bekannten Querkraft auf das Propellerelement $L = \rho V \Gamma(R)$ ist. Aus dieser Forderung folgt, wie man leicht überlegt, als Wert für die Dipolkonstante $C(R)$

$$L(R) dR = C(R) dR = \rho V \Gamma dR \dots \dots \dots (28).$$

Das Schallfeld des angestellten Propellers ergibt sich dann unmittelbar, wenn man $C(R)$ aus Gl. (28) statt $C_2 dx_1$ in Gl. (20) einsetzt und über den Propellerradius integriert. χ hat dabei die Bedeutung des Schalldruckes p . Man erhält für den Schalldruck in großer Entfernung vom Propeller

$$p_2 = \frac{\rho z^2 \omega^2}{2 \pi r c} \sin \Theta \sum_{m=1}^{\infty} m i^{mz+1} \int_0^{R_g} J_{mz}(mz M_R \cos \Theta) \Gamma(R) R dR \cdot \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \dots \dots (29).$$

Setzt man in erster Näherung für die Auftriebsverteilung $\Gamma = \frac{\bar{c}_a}{2} \bar{l} \omega R$ (\bar{c}_a = mittlerer Auftriebsbeiwert) und substituiert wie in (26), so vereinfacht sich die Gleichung (29) zu

$$p_2 = \frac{\rho z^2 c^2 M_{Rg}^2}{4 \pi r} \bar{c}_a \bar{l} \sin \Theta \sum_{m=1}^{\infty} m i^{mz+1} \frac{1}{\xi^3} \int_0^{\xi} J_{mz}(x) x^2 dx \cdot \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \dots (30).$$

Die Integrale in Gleichung (26) und (29) müssen im Spezialfall numerisch ausgewertet werden, während die Integrale in Gl. (27) und (30)

$$\Phi_{p, mz}(\xi) = \int_0^{\xi} x^p J_{mz}(x) dx \dots \dots \dots (31)$$

von Ernsthausen [7] berechnet und für den interessierenden Bereich tabuliert sind.

Zur Bestimmung des gesamten Schallfeldes eines angestellten dicken Propellers überlagert man in schon besprochener Weise das Feld eines angestellten, aber unendlich dünnen Profils dem Feld eines unangestellten dicken Propellerprofils¹⁾. Zur Berechnung des Fernfeldes hat man also lediglich die Teillösungen (26) bzw. (27) und (29) bzw. (30) zu superponieren. Zur Ermittlung des resultierenden Schalldruckes muß man mittels der Beziehung $p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ dazu in Gl. (26) zunächst das Geschwindigkeitspotential in den Schalldruck umrechnen. Das Druckfeld des „dicken“ und das des „angestellten“ Propellers ergeben sich gegeneinander um die Phase $\frac{\pi}{2}$ verschoben. Für den Schalldruck $p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ des angestellten dicken Propellers im Standlauf erhält man dann für das Fernfeld

$$p = \frac{\rho z^3 \omega^2}{2 \pi r} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \exp \left[i m z \omega \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \cdot \sqrt{\left(\int_0^{R_g} D l J_{mz}(mz M_R \cos \Theta) dR \right)^2 + \left(\frac{\sin \Theta}{m z c} \int_0^{R_g} \Gamma(R) R J_{mz}(mz M_R \cos \Theta) dR \right)^2} \dots (32).$$

¹⁾ Es liegt der Einwand nahe, daß durch die Anstellung des Propellers das durch die Dickenwirkung erzeugte Schallfeld verändert wird, also keine lineare Superposition gestattet ist. Dieser Einwand läßt sich damit begründen, daß im Propellerstrahl jetztrot $v \neq 0$ ist und mithin das von der Propellerdicke herrührende Schallfeld nicht mehr mittels Geschwindigkeitssingularitäten berechnet werden darf. Zur Vermeidung dieser Schwierigkeit kann man das durch Dickenwirkung am Propellerblatt erzeugte Druckfeld als Randbedingung wählen und mit Druckpotentialen aufbauen. Damit verzichtet man auf Wellengleichung (1). Die auf diesem Weg gewonnenen Endformeln unterscheiden sich nicht von den im folgenden abgeleiteten.

Da die Schallwellen für das Fernfeld als eben angesehen werden können, folgt aus Gl. (32) die Schallschnelle v mittels der Beziehung $p = \rho c v$, womit sich auch die Schalleistung des Propellers unmittelbar berechnen läßt.

Eine erste Theorie des Propellerschalls ist in einer Reihe von Arbeiten von Ernsthausen [3], [7], [8], [9] auf einem anderen Wege entwickelt worden. Statt der Singularitätenmethode benutzt er die Kirchhoffsche Lösung der Wellengleichung

$$\chi = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial \chi_0}{\partial n} \frac{\exp \left[i\omega \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right]}{r'} dS + \frac{1}{4\pi} \iint \chi_0 \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\exp \left[i\omega \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right]}{r'} \right) dS. \quad (33).$$

Die Integration wird über eine die Schallquelle eng einschließende Kontrollfläche ausgeführt. $\frac{\partial \chi_0}{\partial n}$ und χ_0 sind dabei die Randwerte der Geschwindigkeit und des Druckes am Schraubenkreis. Das erste Integral entspricht unserem Ansatz für den nicht angestellten Propeller, das zweite dem für den angestellten Propeller. Da die notwendige Unterscheidung in der Anwendung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungspotentials damals unbekannt war, ist in [3] die Bestimmung der Randbedingungen ungenau. Zum Angleich an die Formeln (27) und (30) sind die Endformeln Ernsthausens deshalb für den unangestellten Propeller mit dem Faktor im und für den angestellten Propeller mit $\frac{mR_S}{2zl}$ zu multiplizieren.

c) Der vorwärts bewegte Propeller

In den praktischen Anwendungen interessiert vor allem das Schallfeld des Propellers, der sich längs seiner Achse vorwärts bewegt. Die Vorwärtsbewegung verursacht bei den im modernen Flugbetrieb vorkommenden Geschwindigkeiten bereits eine recht beträchtliche Änderung des Propellerschallfeldes. Die Anwendung der für den Standlauf abgeleiteten Formeln auf das Schallfeld eines vorwärts bewegten Propellers ist deshalb unzulässig.

Zur Berechnung des Schallfeldes vorwärts bewegter Propeller geht man aus von Gl. (24) für z schraubenlinig bewegte Quellen. Der Fortschrittsgrad der Quellen betrage wie oben $\lambda = \frac{V_s}{\omega R} = \frac{M}{M_R}$, die Absolutgeschwindigkeit der Anströmung $V = \sqrt{V_s^2 + R^2 \omega^2}$. Um mittels schraubenlinig mit dem Propellerelement mitbewegter Singularitäten die Randbedingungen am Propellerblatt befriedigen zu können, müssen zunächst in Gl. (24) zwei Dipolbildungen vorgenommen werden. Zur Darstellung der Dickenwirkung des Profils benötigt man einen Dipol des Geschwindigkeitspotentials, dessen Achse stets in die Richtung γ der schraubenförmigen Bewegung zeigt. Zur Darstellung der Anstellwirkung benötigt man andererseits das Feld eines Druckdipols, dessen Achse stets senkrecht zur momentanen Bewegungsrichtung steht. Die in Richtung der momentanen effektiven Anströmung zeigende Koordinate werde mit t_γ , die senkrecht dazu stehende mit n_γ bezeichnet. Man erhält aus Gl. (24) für den Dipol $\chi_=($ Dipolachse in Bewegungsrichtung) bei Vernachlässigung quadratisch mit dem Abstand abnehmender Glieder

$$\chi_ = \left. \begin{aligned} &= \frac{\partial \chi_z}{\partial t_\gamma} dt_\gamma = \left(\frac{\partial \chi_z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t_\gamma} + \frac{\partial \chi_z}{\partial \delta} \frac{\partial}{\partial t_\gamma} \right) dt_\gamma = \left(\frac{\partial \chi_z}{\partial x} \sin \gamma + \frac{\partial \chi_z}{\partial \delta} \frac{\cos \gamma}{R} \right) dt_\gamma = \\ &= \frac{C_1 dt z^2 \omega}{2\pi r V \kappa^2 \cos \Theta \sqrt{\text{tg}^2 \Theta + \kappa^2}} \left(1 - M \frac{\text{tg} \Theta}{\sqrt{\text{tg}^2 \Theta + \kappa^2}} \right) \sum_{m=1}^{\infty} m i^{m+1} J_{mz} \left(\frac{mz M_R}{\sqrt{\text{tg}^2 \Theta + \kappa^2}} \right) \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[i m z \omega \left(t + \frac{M(x-x_1) - \sqrt{(x-x_1)^2 + \kappa^2 s^2}}{\kappa^2 c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (34).$$

Ebenso erhält man aus Gl. (24) für den Dipol χ_\perp (Dipolachse senkrecht zur Bewegungsrichtung)

$$\chi_\perp = \left. \begin{aligned} &= \left(\frac{\partial \chi_z}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial \chi_z}{\partial \delta} \frac{\sin \gamma}{R} \right) dn_\gamma = \\ &= \frac{-C_2 dn_\gamma z^2 \omega}{2\pi r V \kappa^2 \cos \Theta \sqrt{\text{tg}^2 \Theta + \kappa^2}} \left[\frac{M}{M_R} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + M_R \frac{\text{tg} \Theta}{\sqrt{\text{tg}^2 \Theta + \kappa^2}} \right] \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m i^{m+1} J_{mz} \left(\frac{mz M_R}{\sqrt{\text{tg}^2 \Theta + \kappa^2}} \right) \exp \left[i m z \omega \left(t + \frac{M(x-x_1) - \sqrt{(x-x_1)^2 + \kappa^2 s^2}}{\kappa^2 c} + \frac{\delta - \psi}{\omega} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (35).$$

Quadratisch kleine Glieder sind wieder vernachlässigt.

Stellt wiederum χ das Geschwindigkeitspotential und χ_1 die Druckverteilung dar, so findet man zur Befriedigung der Randbedingungen am Propeller wie in (25) und (28)

$$C_1 dt_\nu = D l V \quad \text{und} \quad C_2 d n_\nu = \rho V \Gamma \dots \dots \dots (36).$$

Bei gleichförmig gerader Mitbewegung des Aufpunktes mit der Geschwindigkeit V_x ist gemäß der linearisierten Eulerschen Gleichung der Zusammenhang zwischen Schalldruck und Geschwindigkeitspotential gegeben durch

$$p = \rho \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} + V_x \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \dots \dots \dots (37).$$

Wenn man mittels Gl. (37) in Gl. (34) zum Druck übergeht und über den Propellerradius integriert, so erhält man analog zu der beim Propeller im Stand durchgeführten Rechnung im Fernfeld des dicken angestellten vorwärts bewegten Propellers für den Schalldruck

$$p = \frac{\rho z^3 \omega^2}{2\pi r \kappa^2 \cos \Theta \sqrt{\lg^2 \Theta + \kappa^2}} \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \exp \left[i m z \omega \left(t + \frac{M(x-x_1) - \sqrt{(x-x_1)^2 + \kappa^2 s^2}}{\kappa^2 c} + \frac{\delta - \psi}{\pi} \right) \right] \cdot \left\{ \sqrt{\left[\left(1 - M \frac{\lg \Theta}{\sqrt{\lg^2 \Theta + \kappa^2}} \right)^2 \int_0^{R_S} \frac{D l}{\kappa^2} J_{mz} \left(\frac{m z M_R}{\sqrt{\lg^2 \Theta + \kappa^2}} \right) dR \right]^2 + \left[\int_0^{R_S} \left(\frac{M}{M_R} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + M_R \frac{\lg \Theta}{\sqrt{\lg^2 \Theta + \kappa^2}} \right) \frac{\Gamma(R)}{m z \omega} J_{mz} \left(\frac{m z M_R}{\sqrt{\lg^2 \Theta + \kappa^2}} \right) dR \right]^2} \right\} \quad (38).$$

Gl. (38) stellt mithin die umfassende Gleichung für das Schallfernfeld eines Propellers dar. Das Integral muß im allgemeinen Fall numerisch ausgewertet werden.

d) Der angestellte Propeller im Standlauf (2. Näherung)

Bei der Berechnung des Schallfeldes eines im Stand laufenden Propellers dürfen die mit der Strahlgeschwindigkeit nach hinten abschwimmenden Wirbel — wie oben schon gezeigt wurde — nicht mehr vernachlässigt werden. Man ersetzt deshalb in diesem Fall den Propeller durch einen mit der Strahlgeschwindigkeit V_x von vorn angeblasenen Propeller und berechnet das Schallfeld in einem relativ zum Propeller ruhenden Bezugssystem nach den Formeln (34), (35) und (38) für den vorwärts bewegten Propeller. Die Zusatzgeschwindigkeit V_x werde über den Strahlquerschnitt als konstant angenommen. Sie berechnet sich aus dem Propellerschub T_S in hinreichender Näherung zu

$$V_x = \sqrt{\frac{2 T_S}{\rho \pi R_S^2}} \dots \dots \dots (39).$$

Die Geschwindigkeiten der gebundenen und freien Wirbel werden damit richtig wiedergegeben, und das Schallfeld kann im Inneren und auf dem Rand des Schraubenstrahls in guter Näherung errechnet werden. Da die Luft im Außenraum ruht, müßte man mit den so auf dem Strahlrand errechneten Drucken als Randwerten mittels der Kirchhoffschen Formel oder der Singularitätenmethode das Druckfeld im ganzen Raum bestimmen. Dieser in der praktischen Durchführung sehr komplizierte Weg soll hier nicht beschritten werden. Es wird vielmehr versuchsweise das Feld des mit der Geschwindigkeit V_x angeströmten Propellers im ganzen Raum als Näherungslösung für den angestellten Propeller im Standlauf genommen.

Man rechnet damit so, als ob auch außerhalb des Propellerstrahles überall die Geschwindigkeit V_x herrscht. Diese fehlerhafte Annahme führt bei der Phasenbestimmung zu entscheidenden Fehlern. Bei der Berechnung des effektiven Schalldruckes dürfte die Auswirkung dieses Fehlers aber nicht so wesentlich sein, solange $V_x \ll c$ bleibt. Diese Bedingung ist im allgemeinen erfüllt. Das Schallfeld des angestellten Propellers im Standlauf wird damit ebenfalls durch

Gl. (38) wiedergegeben, wobei $M = \frac{V_x}{c}$ aus Gl. (39) bestimmt werden muß. Daß die so erhaltene Näherungslösung mit der Wirklichkeit recht gut übereinstimmt, zeigt der im folgenden durchgeführte Vergleich mit Experimenten.

4. Vergleich zwischen Theorie und Experiment

Zur Prüfung der Theorie liegen auswertbare Messungen an Flugzeugen nicht vor. Dagegen wurden von Ernsthausen [3] an Modellschrauben im Standlauf sehr sorgfältige experimentelle Messungen durchgeführt. Verwandt wurden für die Messungen zweiflügelige Modell-

schrauben von 30 cm Durchmesser mit symmetrischen NACA-Profilen mit Dickenverhältnissen bis 18% und Anstellwinkeln bis 12°. Gemessen wurde die Schallfeldverteilung für jeweils die ersten 8 Harmonischen bei Umfangsgeschwindigkeiten von 200 bis 400 m/sec ($0,6 < M_{RS} < 1,3$).

Soweit die Messungen Ernsthausens in [3] veröffentlicht sind, wurden sie mit der hier vorliegenden Theorie verglichen. Die Rechnung wurde für den unangestellten Propeller nach Gl. (26) und für den angestellten Propeller nach Gl. (38) und (39) durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 1 bis 3 dargestellt. Da die Messungen in einer Entfernung von 2 m durchgeführt wurden, mußte für den angestellten Propeller zur Berechnung des Schallfeldes das in (35) und (38) vernachlässigte Nahfeldglied mit berücksichtigt werden.

Abb. 1 zeigt die für die Propellerebene gemessenen und berechneten effektiven Schalldrücke eines nicht

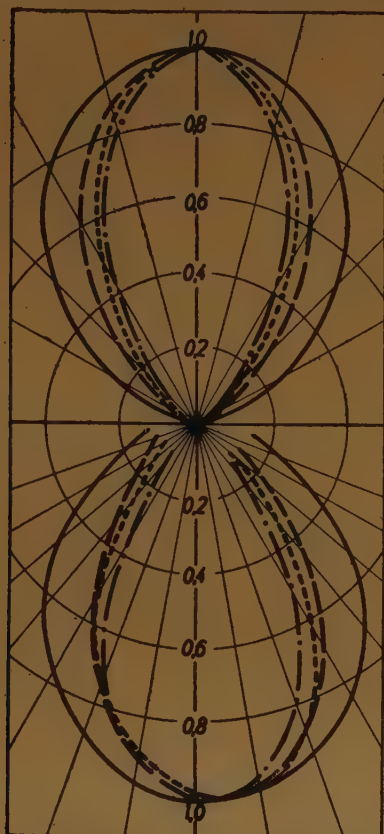


Bild 2. Richtcharakteristik einer nichtangestellten Schraube im Standlauf (Profil NACA 630012) für die ersten vier Harmonischen ($M_{RS} = 0,8$)

— $m = 1$ } oben: gerechnet
 — $m = 2$ }
 - - - $m = 3$ } unten: Meßwerte
 - · - $m = 4$ } Ernsthausen

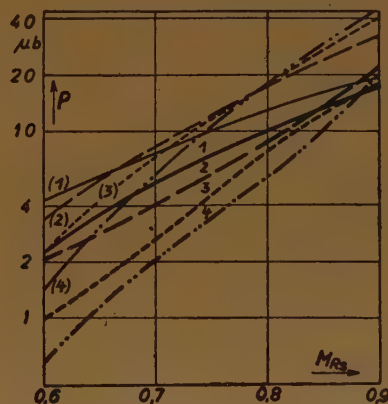


Bild 1. Maximaler Schalldruck einer nichtangestellten Schraube (Profil NACA 630012) in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit

— $m = 1$ }
 — $m = 2$ } Meßwerte
 - - - $m = 3$ } Ernsthausen
 - · - $m = 4$ }
 — $m = (1)$ }
 — $m = (2)$ } gerechnet
 - - - $m = (3)$ }
 - · - $m = (4)$ }

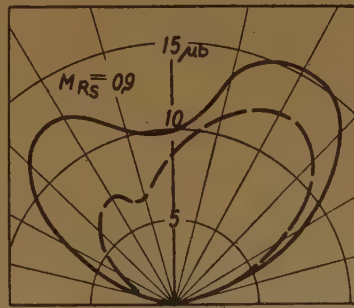
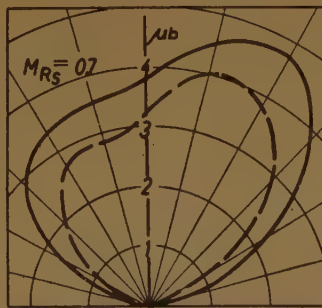
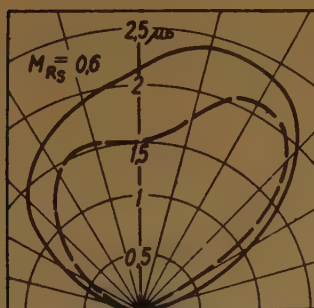


Bild 3. Schalldruckverteilung des Grundtones einer angestellten Schraube im Standlauf für verschiedene Umfangsgeschwindigkeiten (Profil NACA 630006)

— gerechnet — — — — — gemessen

angestellten Propellers für die ersten 4 Harmonischen in Abhängigkeit von der Umfangsgeschwindigkeit. Schon bei Machschen Zahlen von 0,6 liegen die Rechenwerte fast um den Faktor 2 zu hoch. Die Abweichungen dürften dadurch begründet sein, daß bei dem im Standlauf drehenden nicht angestellten Propeller die effektive Anströmgeschwindigkeit am Profil infolge Mitdrehens der Luft im Schraubenkreis sehr stark herabgesetzt wird. Die Größe der Quellkonstante C müßte deshalb entsprechend verkleinert werden. Dagegen ist beim angestellten

Propeller im Standlauf ein Mitdrehen der Luft in geringerem Maße zu erwarten. Beim vorwärts bewegten Propeller ist die Änderung der effektiven Anströmung im Rahmen unserer linearisierten Theorie ganz zu vernachlässigen.

Abb. 2 zeigt die berechnete und die gemessene Richtcharakteristik der gleichen Modellschraube für die ersten 4 Harmonischen für eine hohe Umfangsgeschwindigkeit. Die räumliche Schallfeldverteilung wird in den einzelnen Harmonischen richtig wiedergegeben.

Abb. 3 zeigt die Richtcharakteristik für den Grundton eines angestellten Propellers im Standlauf bei verschiedenen Umlaufgeschwindigkeiten. Auch hier liegen wegen des Mitdrehens der Luft im Schraubenkreis die Rechenwerte noch etwas über den Meßwerten, doch ist die Übereinstimmung wesentlich besser als im Fall des unangestellten Propellers. Die räumliche Schallfeldverteilung wird für $M_{Rg} = 0,6$ und $M_{Rg} = 0,7$ gut wiedergegeben, dagegen treten bei $M_{Rg} = 0,9$ Abweichungen auf. Diese starken Abweichungen bei hohen Ma h-schen Zahlen erklären sich daraus, daß zur Druckbestimmung am Propellerprofil c_a -Werte benutzt werden mußten, die bei kleinen Ma h-Zahlen gemessen waren. Durch Berücksichtigung der $Prandtl$ -

Kontraktion wurde daraus ein für die Rechnung gültiges $c_a' = \sqrt{\frac{c_a}{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ gewonnen, was nach

den bisherigen Erfahrungen im Bereich hoher Unterschallgeschwindigkeiten nur bis etwa $M_{Rg} = 0,75$ zulässig ist. Darüber hinaus erhält man (vgl. z. B. *Helmbold* [10]) zu große c_a -Werte.

Hinsichtlich der Obertonverteilung ist für den angestellten Propeller ein Vergleich mit Experimenten leider nicht möglich, da Meßwerte nur für $M_{Rg} = 0,9$ vorliegen.

Für den Fall des vorwärts bewegten Propellers können die vom Propeller induzierten Zusatzgeschwindigkeiten (radiale und axiale Zusatzgeschwindigkeit der Luft im Propellerkreis) vernachlässigt werden. Die Ergebnisse der Theorie (nach Gl. (38)) dürften deshalb mit der Praxis wesentlich besser als im Standlauf übereinstimmen. Als Beispiel wurde das Schallfeld eines Flugzeugpropellers natürlicher Größe berechnet ¹⁾. Die Richtcharakteristik wurde getrennt nach Dickenanteil (Abb. 4) und Schubanteil (Abb. 5) aufgezeichnet. Abb. 6 gibt die durch Superposition gewonnene gesamte Richtcharakteristik der angestellten vorwärts bewegten Schraube.



Bild 4. Schalldruckverteilung des Grundtones einer vorwärtsbewegten Normalflugschraube — Dickenanteil

- a) Schraube I ($\lambda = 0,2$;
 $M_{Rg} = 0,8$)
b) Schraube II ($\lambda = 0,5$;
 $M_{Rg} = 0,8$)



Bild 5. Schalldruckverteilung des Grundtones einer vorwärtsbewegten Normalflugschraube — Schubanteil

- a) Schraube I ($\lambda = 0,2$;
 $M_{Rg} = 0,8$)
b) Schraube II ($\lambda = 0,5$;
 $M_{Rg} = 0,8$)



Bild 6. Schalldruckverteilung des Grundtones einer vorwärtsbewegten Normalflugschraube — Gesamtschalldruck

- a) Schraube I ($\lambda = 0,2$;
 $M_{Rg} = 0,8$)
b) Schraube II ($\lambda = 0,5$;
 $M_{Rg} = 0,8$)

Entsprechend dem Überwiegen der Anstellwirkung ergibt sich eine Verstärkung des Schalldruckes nach rückwärts. Das der Dickenwirkung des Propellers entsprechende sekundäre Maximum in Flugrichtung (bei $\Theta = 30^\circ$) tritt hier nur sehr schwach auf, da für die Normalluft-

¹⁾ Entwurf einer der Bestschraube angenäherten Normalflugschraube nach *Helmbold* ([10], C, 2) für $\lambda = 0,2$ und $\lambda = 0,5$. Ma h-Zahl der Propellerspitzen $M_{Rg} = 0,8$, Leistung 1000 PS.

schraube ein dünnes Profil gewählt wurde. Dickere Profile ergeben — unter sonst gleichen Betriebsbedingungen — eine Vergrößerung der Werte in Abb. 4 und entsprechend eine Verschärfung des Nebenmaximums in Abb. 6.

Die Maximalwerte des Schalldrucks entsprechen mit $pr = 1400 \mu b \cdot m$ Schalldrucken, wie sie im Flugbetrieb bei Propellern mit hohen Umfangsgeschwindigkeiten beobachtet werden. Für kleine Umfangsgeschwindigkeiten (etwa $M_{Rg} = 0,6$) ergibt sich bei gleicher Motorenleistung ein wesentlich niedrigerer Maximalwert von $900 \mu b \cdot m$.

Allgemein läßt sich aus der Formel (38) noch folgendes ableiten:

Propeller ohne Anstellung ergeben zweiblättrige Richtcharakteristiken mit entsprechend dem Fortschrittsgrad in Flugrichtung vorgeneigtem Maximum (Abb. 4). Dagegen gibt der zweite Term der Gl. (38) vierblättrige Charakteristiken, das Maximum des abgestrahlten Schalls liegt hinter die Schraubenebene verschoben (Abb. 5). Beide Anteile sind etwa von gleicher Größenordnung. Mit steigender Blatt- bzw. Obertonzahl nimmt der Einfluß der Anstellung im Vergleich zur Dickenwirkung ab.

Schrifttum

- [1] H. Billing, H. Merbt: Modern Aeronautical Acoustics. AVA Monographes R. Völknerode 1947.
- [2] H. Billing: Geradlinig bewegte Schallquellen. Z. angew. Math. Mech. 1949.
- [3] W. Ernsthausen: Der Einfluß ärodynamischer Eigenschaften auf Schallfeld und Strahlungsleistung einer Luftschraube. Akust. Zeitschr. Bd. VI (1941), S. 245.
- [4] G. A. Schott: Electromagnetic radiation. Cambridge 1912.
- [5] H. G. Küssner: Lösungen der klassischen Wellengleichung für bewegte Quellen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 25 (1945), S. 59—66.
- [6] H. Merbt: Untersuchung zur Arbeit Küssner [5]. AVA 44/J/31 (1944).
- [7] W. Ernsthausen: Strahlergruppen mit umlaufender Phase. Akust. Zeitschr. Bd. III (1938), S. 380.
- [8] W. Ernsthausen: Untersuchungen über das Luftschraubengeräusch. Akust. Zeitschr. Bd. III (1938), S. 141.
- [9] W. Ernsthausen, W. Willms: Über die Berechnung des Schallfeldes einer Luftschraube. Akust. Zeitschr. Bd. IV (1939), S. 20.
- [10] H. B. Helmbold: Der Entwurf einer Luftschraube für gegebene Betriebsverhältnisse. Ringbuch IC 2 (1937).

Eingegangen: 26. 11. 1948.

Zur Theorie der tragenden Linie mit periodischer Zirkulation

Von Herbert Bilharz in Freiburg i. Br.

Es wird die zweite Grundaufgabe der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie für eine vorgegebene periodische Anstellwinkelverteilung gelöst und die erhaltenen Ergebnisse an zwei Beispielen veranschaulicht.

The second fundamental problem of the Prandtl theory of the trailing line is solved for a given periodical distribution of the angle of incidence, and the results obtained are illustrated by two examples.

Le second problème fondamental de la théorie de la ligne portante selon Prandtl est résolu pour une distribution périodique donnée de l'angle d'incidence. Les résultats trouvés sont illustrés par deux exemples.

Решается вторая основная задача теории плоского крыла Прандтля для заданного периодического распределения углов атаки. Полученные результаты иллюстрируются на двух примерах.

1. Einleitung

Als L. Prandtl¹⁾ vor 31 Jahren in seiner ersten Mitteilung zur Tragflügeltheorie die tragende Linie mit periodischer Zirkulation als einfachstes, seiner Methode zugängliches Beispiel behandelte, schien jenes Problem nur theoretisches Interesse zu besitzen. Inzwischen hat es längst in mehrfacher Hinsicht praktische Bedeutung erlangt, worüber u. a. eine Patentschrift²⁾ aus dem Jahre 1940 unterrichtet, die eine periodische Verformung der Hinterkante von umströmten Körpern zum Gegenstand hat, um größere Wirbelballen in einzelne kleinere Wirbelzöpfe aufzulösen. Es schien daher angebracht, jenes Beispiel Prandtl's, zumal es a. a. O. nur kurze Erwähnung findet, wieder aufzugreifen und in seinen Einzelheiten weiter zu verfolgen, insbesondere den induzierten Widerstand und das Abwindfeld zu bestimmen. Dies ist das Ziel der vorliegenden Mitteilung. Zwei Beispiele werden zur Belebung des dargebotenen Formelapparates explizite durchgerechnet.

2. Bestimmung der Zirkulation

Im unbegrenzten Raume sei bezüglich eines kartesischen (x, y, z) -Koordinatensystems eine stationäre, zur (x, z) -Ebene parallele, reibungsfreie und inkompressible Strömung gegeben. Der

¹⁾ L. Prandtl, Tragflügeltheorie, 1. Mitteilung. Nachr. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-phys. Kl. 1918; S. 451—477; insbes. S. 471—473.

²⁾ Patentschrift Nr. 695 428, Kl. 74 d, Gr. 6₁₆ (Berlin 1940).

Geschwindigkeitsvektor habe im Unendlichen den Betrag V ; die Dichte des Mediums sei $\rho = \text{const} > 0$. Die y -Achse trage eine kontinuierliche Wirbelbelegung $\gamma(y)$, die eine vorgegebene örtliche geometrische Anstellwinkelverteilung $\alpha(y)$ hervorbringe, welche mod $2l$ periodisch ($0 < l < \infty$) und durch die konvergente Fouriersche Reihe

$$\alpha(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n \frac{\pi y}{l} + b_n \sin n \frac{\pi y}{l} \right) \dots \dots \dots (2.1)$$

dargestellt sei.

Unter den, der Prandtl'schen linearisierten Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen³⁾ folgt die zu bestimmende Zirkulation $\gamma(y)$ aus der Integrodifferentialgleichung

$$\alpha(y) = \frac{1}{4\pi V} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} + \frac{\gamma(y)}{\pi V} \dots \dots \dots (2.2)$$

mit dem Cauchy'schen Hauptwert an der Stelle $y' = y$.

Zur eindeutigen Auflösung dieser Gleichung nach $\gamma(y)$ wählen wir den Reihenansatz:

$$\gamma(y) = \pi V \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n \frac{\pi y}{l} + B_n \sin n \frac{\pi y}{l} \right) \right] \dots \dots \dots (2.3)$$

Mit der Substitution $\eta = y - y'$ und Beachtung von

$$\oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u \eta}{\eta} d\eta = \pi, \quad \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos u \eta}{\eta} d\eta = 0 \dots \dots \dots (2.4)$$

für $u > 0$, folgt nach einiger Zwischenrechnung⁴⁾

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} = \frac{\pi^2 V}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(A_n \cos n \frac{\pi y}{l} + B_n \sin n \frac{\pi y}{l} \right) \dots \dots \dots (2.5)$$

und nach (2.1) und (2.2) für die Koeffizienten von γ in (2.3)

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \frac{a_n}{1 + \frac{n\pi^2}{4l}}, \quad B_n = \frac{b_n}{1 + \frac{n\pi^2}{4l}} \quad (n = 1, 2, \dots) \dots \dots (2.6)$$

3. Auftrieb und Widerstand

Mit einer fest gewählten Längeneinheit als Bezugstiefe hat der Auftrieb (z -Komponente der resultierenden Kraft) über eine volle Periode den Betrag

$$A(2l) = c_a \frac{\rho}{2} V^2 \cdot 2l = \rho \int_{-l}^l \gamma(y) dy \dots \dots \dots (3.1);$$

unabhängig von der Periodenlänge ergibt sich hieraus ein dem mittleren geometrischen Anstellwinkel $\alpha_0/2$ proportionaler Auftriebsbeiwert

$$c_a = 2\pi \cdot \frac{\alpha_0}{2} \dots \dots \dots (3.2).$$

Der Betrag des induzierten Widerstandes (x -Komponente der resultierenden Kraft) über ein volles Periodenintervall ist

$$W(2l) = c_w \frac{\rho}{2} V^2 \cdot 2l = \rho \int_{-l}^l \gamma(y) v(y) dy \dots \dots \dots (3.3),$$

worin die Zirkulation γ aus (1.3) und der Betrag

$$v(y) = \frac{1}{4\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{dy'} \frac{dy'}{y-y'} \dots \dots \dots (3.4)$$

³⁾ L. Prandtl, loc. cit. S. 466—467.

⁴⁾ Hierbei vorzunehmende Vertauschung in der Reihenfolge von Integration und Summation ist nach einem Satze von C. Arzelà gestattet, falls wir voraussetzen, daß die Folge der Partialsummen des Integranden, die gegen eine integrierbare Funktion konvergiere, selbst integrierbar und gleichmäßig beschränkt sei. Vgl. etwa F. Hausdorff, Beweis eines Satzes von Arzelà, Math. Ztschr. 26 (1926), S. 135—137.

der, von den freien Wirbeln der Stärke $\frac{d\gamma}{dy}$ längs der y -Achse induzierten Geschwindigkeit unter Zuhilfenahme von (2.5) einzusetzen sind. Wegen der Orthogonalitätseigenschaften der trigonometrischen Funktionen erhalten wir das einfache Ergebnis:

$$c_w = \frac{\pi^3}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n (A_n^2 + B_n^2) \dots \dots \dots (3.5),$$

also einen von der Periode abhängigen Widerstandsbeiwert. Da $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ konvergiert, ist die unendliche Reihe in (3.5) a fortiori konvergent.

4. Abwindfeld

Nach dem Gesetz von Biot und Savart ist allgemein der Betrag w des von einer Wirbellinie s im Aufpunkte P induzierten Geschwindigkeitsvektors \mathbf{w} durch das Linienintegral

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{(s)} \frac{\gamma(s) \sin \varphi}{r^2} ds \dots \dots \dots (4.1)$$

gegeben, worin $\gamma(s)$ die Zirkulation, ds das Linienelement von s , r den Abstand des Aufpunktes von ds und $\varphi(s)$ den Winkel zwischen der Richtung des Wirbelelementes und seiner Verbindungsgeraden mit P bezeichnet. Der Vektor \mathbf{w} steht normal zur Ebene durch r und ds , seine Orientierung um s stimmt mit derjenigen von $\gamma(s)$ überein.

Um hiernach das Abwindfeld zu berechnen, beginnen wir zunächst mit der Bestimmung des Abwindes w_y , der von der y -Achse (gebundener Wirbel) in einem Aufpunkte $P(\hat{x}, \hat{y}, 0)$ mit $\hat{x} > 0$ induziert wird. Hierbei kann die y -Koordinate des Aufpunktes infolge der Periodizität auf das Grundintervall $-l \leq \hat{y} \leq l$ beschränkt werden.

Nach Einführung der Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{\hat{x}^2 + (y - \hat{y})^2} > 0, \quad \psi = \arctg \frac{y - \hat{y}}{\hat{x}} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right) \dots \dots (4.2)$$

folgt aus (4.1) mit beschränkt konvergentem $\gamma(y)$ aus (2.3) und gliedweiser Integration

$$w_y(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{V}{4\hat{x}} \left\{ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \left[n \frac{\pi}{l} (\hat{x} \operatorname{tg} \psi + \hat{y}) \right] \cos \psi d\psi + B_n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \left[n \frac{\pi}{l} (\hat{x} \operatorname{tg} \psi + \hat{y}) \right] \cos \psi d\psi \right) \right\} \quad (4.3)$$

und daraus mit der weiteren Variablentransformation

$$\operatorname{Sin} \tau = \operatorname{tg} \psi \quad \left(-\infty \leq \tau \leq \infty; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}\right) \dots \dots \dots (4.4)$$

schließlich

$$w_y(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{V}{4\hat{x}} \left\{ A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n \frac{\pi \hat{y}}{l} + B_n \sin n \frac{\pi \hat{y}}{l} \right) \int_0^{\infty} \frac{\cos \left[n \frac{\pi \hat{x}}{l} \operatorname{Sin} \tau \right]}{\operatorname{Cos}^2 \tau} d\tau \right\} \quad (4.5).$$

Da die modifizierte Besselsche Funktion zweiter Art und p -ter Ordnung, $K_p(\zeta)$, welche mit Hilfe der modifizierten Funktion erster Art:

$$I_p(\zeta) = i^{-p} J_p(i\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! (p+s)!} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{p+2s} \dots \dots \dots (4.6)$$

für nicht negatives ganzzahliges p durch

$$K_p(\zeta) = \frac{\partial}{\partial p} [I_{-p}(\zeta) - I_p(\zeta)] \dots \dots \dots (4.7)$$

definiert ist, der Basset'schen Integraldarstellung⁵⁾

$$K_p(\zeta) = \frac{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\zeta}\right)^p \int_0^{\infty} \frac{\cos(\zeta \operatorname{Sin} \tau)}{\operatorname{Cos}^{2p} \tau} d\tau \dots \dots \dots (4.8)$$

⁵⁾ G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge 1922), S. 172; Funktionswerte daselbst S. 698—713 und S. 737.

mit der Eulerschen Gammafunktion

$$\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2p)}{2^{2p-1} \Gamma(p)} \quad (p > 0), \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad \dots \quad (4.9)$$

genügt, erhalten wir für $p = 1$ und $\zeta = n \frac{\pi \hat{x}}{l}$ aus (4.5) und (4.8)

$$\frac{w_y(\hat{x}, \hat{y})}{V} = \frac{1}{2\hat{x}} \left\{ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\pi \hat{x}}{l} K_1\left(n \frac{\pi \hat{x}}{l}\right) \left[A_n \cos n \frac{\pi \hat{y}}{l} + B_n \sin n \frac{\pi \hat{y}}{l} \right] \right\} \quad \dots \quad (4.10).$$

Für $\zeta \geq 0$ ist $0 \leq \zeta K_1(\zeta) \leq 1$, denn $\zeta K_1(\zeta)$ ist monoton fallend und

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \zeta K_1(\zeta) = 1; \quad \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{K_1(\zeta)}{\sqrt{\frac{\pi}{2\zeta}} e^{-\zeta}} = 1 \quad \dots \quad (4.11);$$

bei festem \hat{y} ist daher w_y aus (4.10) von der Ordnung \hat{x}^{-1} und kann deshalb für das Folgende unberücksichtigt bleiben.

Die induzierte Geschwindigkeit $v_i(\hat{x}, \hat{y})$ der freien Wirbel bestimmt sich ebenfalls aus (4.1), indem wir zunächst parallel zur x -Achse, sodann über die y -Richtung integrieren und an der Geraden $y = \hat{y}$ den Cauchy'schen Hauptwert nehmen:

$$v_i(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{dy} \left(1 + \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2 + (y - \hat{y})^2}} \right) \frac{dy}{y - \hat{y}} \quad \dots \quad (4.12).$$

Der erste Summand dieses Integrals ist aus (3.4) bekannt und hat nach (2.5) den Wert

$$v = \frac{\pi^2 V}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(A_n \cos n \frac{\pi \hat{y}}{l} + B_n \sin n \frac{\pi \hat{y}}{l} \right) \quad \dots \quad (4.13);$$

es ist danach hinreichend, das Integral

$$\bar{v}_i(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{d\gamma}{dy} \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2 + (y - \hat{y})^2}} \frac{dy}{y - \hat{y}} \quad \dots \quad (4.14)$$

auszuwerten, welches für $\hat{x} \rightarrow \infty$ ebenfalls gegen v konvergiert.

Mit (4.2) geht (4.14) über in

$$\bar{v}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{\pi V}{4l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(A_n \cos n \frac{\pi \hat{y}}{l} + B_n \sin n \frac{\pi \hat{y}}{l} \right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \left[n \frac{\pi \hat{x}}{l} \operatorname{tg} \psi \right] \frac{d\psi}{\sin \psi} \quad \dots \quad (4.15).$$

Wird zur Abkürzung für $\chi \geq 0$

$$H(\chi) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\chi \operatorname{tg} \psi) \frac{d\psi}{\sin \psi} \quad \dots \quad (4.16)$$

gesetzt, so folgt, da die zu (4.8) führenden Überlegungen auch im Limes $p = 0$ gelten, daß das Integral

$$\frac{1}{2} \frac{dH}{d\chi} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\chi \operatorname{tg} \psi) \frac{d\psi}{\cos \psi} = \int_0^{\infty} \cos(\chi \operatorname{Sh} \tau) d\tau \quad \dots \quad (4.17)$$

existiert und gleich der modifizierten Besselschen Funktion $K_0(\chi)$ von zweiter Art und nullter Ordnung ist; wegen $H(0) = 0$ ist daher

$$H(\chi) = 2 \int_0^{\infty} K_0(\zeta) d\zeta \quad \dots \quad (4.18),$$

und es gilt nach Heaviside⁶⁾

$$\lim_{\chi \rightarrow \infty} H(\chi) = 2 \int_0^{\infty} K_0(\zeta) d\zeta = \pi \quad \dots \quad (4.19).$$

⁶⁾ G. N. Watson, loc. cit. S. 388.

Bild 1 zeigt den Verlauf von $H(\chi)$ für $\chi \geq 0$.

Aus (4.15) und (4.16), falls darin $\chi = n \frac{\pi \hat{x}}{l}$ gesetzt wird, erhalten wir sodann

$$\frac{\bar{v}_i(\hat{x}, \hat{y})}{V} = \frac{1}{4\hat{x}} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\pi \hat{x}}{l} H\left(n \frac{\pi \hat{x}}{l}\right) \left[A_n \cos n \frac{\pi \hat{y}}{l} + B_n \sin n \frac{\pi \hat{y}}{l} \right] \quad (4.20)$$

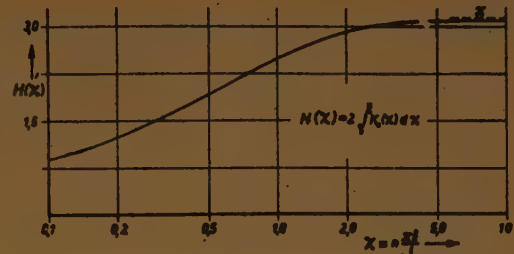


Bild 1

und schließlich durch Zusammenfassen von (4.13)

und (4.20) den Abwind der freien Wirbel in Punkten der (x, y) -Ebene:

$$\frac{v_i}{V} = \frac{1}{V} (v + \bar{v}_i) = \frac{\pi}{2l} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\pi}{2} + H\left(n \frac{\pi \hat{x}}{l}\right) \right) \left(A_n \cos n \frac{\pi \hat{y}}{l} + B_n \sin n \frac{\pi \hat{y}}{l} \right) \quad (4.21).$$

5. Beispiele

Als Beispiele für ein mod. $2l$ periodisches $\hat{\alpha}(y)$ wählen wir

a) eine reine Kosinusverteilung um den Mittelwert $c_0 \neq 0$:

$$\hat{\alpha}(y) = c_0 + c_1 \cos \frac{\pi y}{l} \quad (c_1 \neq 0) \quad (5.a),$$

b) eine gerade, abteilungsweise konstante Funktion:

$$\hat{\alpha}(y) = \begin{cases} c_1 & 0 \leq |y| < l/2, \\ \frac{c_2 + c_3}{2} & \text{für } |y| = l/2, \\ c_3 & \frac{l}{2} < |y| \leq l \end{cases} \quad (5.b),$$

wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Konstante c_2 größer als die Konstante c_3 angenommen werden kann.

Diese Verteilungen geben die einfachsten Modellvorstellungen für die in Bild 2 dargestellten periodisch verformten (geschwungenen bzw. gekröpften) Profilstäbe von unendlicher Länge und konstanter Tiefe.

Die Fourier-Konstanten der Reihe (2.1) sind

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= c_0, & a_1 &= c_1, \\ a_n &= b_{n-1} = 0 & \text{für } n &= 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1a)$$

beziehungsweise

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{c_2 + c_3}{2}, & a_{4n+1} &= \frac{2(c_2 - c_3)}{(4n+1)\pi}, \\ a_{4n+3} &= \frac{-2(c_2 - c_3)}{(4n+3)\pi}, \\ a_{2(n+1)} &= b_{n+1} = 0 & \text{für } n &= 0, 1, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.1b).$$

Durch die Gleichungen

$$\alpha = c_0, \quad \delta = c_1 \quad (5.2a)$$

beziehungsweise durch

$$\alpha = \frac{c_2 + c_3}{2}, \quad \delta = \frac{c_2 - c_3}{2} \quad (5.2b)$$

sei ein mittlerer geometrischer Anstellwinkel α und ein Differenzwinkel δ , der das Maximum von $|\hat{\alpha} - \alpha|$ angibt, erklärt. Mit diesen Bezeichnungen und den aus (2.6) errechneten Koeffizienten lauten dann nach (2.3) die Zirkulationen:

$$\gamma(y) = \pi V \left(\alpha + \frac{\delta}{1 + \frac{\pi^2}{4l}} \cos \frac{\pi y}{l} \right) \quad (5.3a)$$

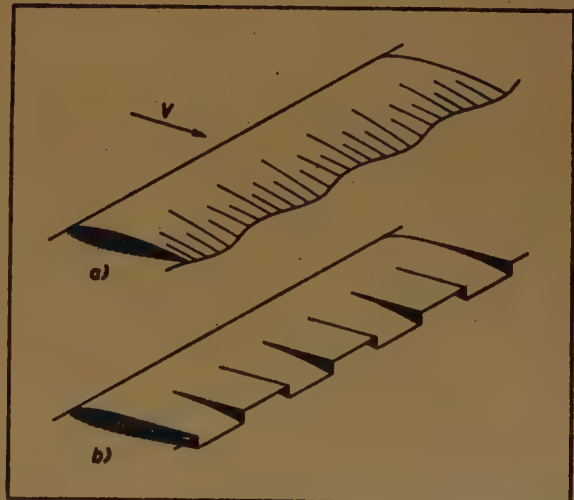


Bild 2

und

$$\gamma(y) = \pi V \left\{ \alpha + \frac{4\delta}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos(4n+1)\frac{\pi y}{l}}{(4n+1)\left(1 + (4n+1)\frac{\pi^2}{4l}\right)} - \frac{\cos(4n+3)\frac{\pi y}{l}}{(4n+3)\left(1 + (4n+3)\frac{\pi^2}{4l}\right)} \right) \right\} \quad (5.3b).$$

Für die Belegung (5a) ist die Zirkulation (5.3a) längs der y -Koordinate ebenfalls eine um ihren Mittelwert schwankende Kosinuslinie, deren Amplitude mit l monoton wächst.

Im Falle (5b) ist mit $\alpha = \delta$, also $c_3 = 0$, die Zirkulation (5.3b) im Grundintervall $-l \leq y \leq l$ für verschiedene Werte von l in Bild 3 aufgetragen. Die Amplitude nimmt ebenfalls mit l monoton zu; die Maximalwerte beider Verteilungen stimmen näherungsweise überein und in beiden Fällen findet ein Ausgleich der Strömung nach den Periodenenden hin statt; mit abnehmender Periodenlänge strebt der γ proportionale effektive Anstellwinkel gegen den Mittelwert α .

Der Auftriebsbeiwert ist nach (3.2)

$$c_a = 2\pi\alpha \dots \dots \dots (5.4a, b);$$

die Widerstandsbeiwerte sind nach (3.5)

$$c_w = \delta^2 \frac{\pi^3}{4l} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2}{4l}\right)^2} \dots \dots \dots (5.5a)$$

und

$$c_w = \delta^2 \frac{4\pi^2}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\left(1 + (2n+1)\frac{\pi^2}{4l}\right)^2} \dots \dots \dots (5.5b)$$

also unabhängig von α und quadratisch in δ .

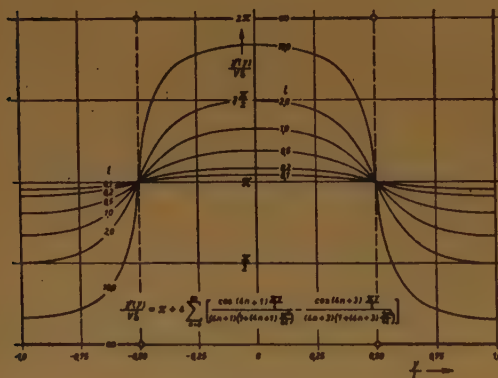


Bild 3

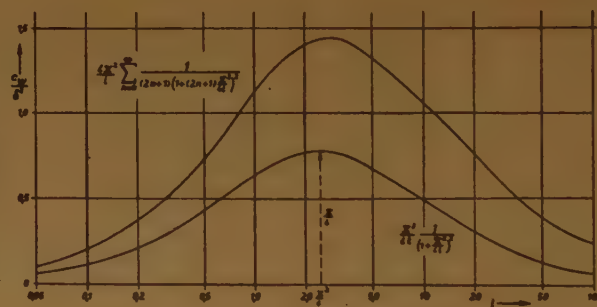


Bild 4

Die Abhängigkeit von l ist für (5.5a) leicht festzustellen, denn diese Funktion hat an der Stelle $l = \frac{\pi^2}{4}$ ein endliches, positives Maximum: $\max c_w = \delta^2 \frac{\pi}{4}$ und strebt, wie es sein muß, nach Null bei den Grenzübergängen $l \rightarrow 0$ und $l \rightarrow \infty$. Ein ähnliches Verhalten zeigt die unendliche Reihe in (5.5b). Mit Hilfe der Eulerschen Summenformel⁷⁾ erhält man bis auf einen von l unabhängigen Fehler, der dem absoluten Betrage nach kleiner als 0,0017 gemacht werden kann,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\left(1 + (2n+1)\frac{\pi^2}{4l}\right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2}{4l}\right)^2} + \frac{1}{3\left(1 + \frac{3\pi^2}{4l}\right)^2} + \frac{1}{5\left(1 + \frac{5\pi^2}{4l}\right)^2} + \frac{1}{2} \left\{ \ln\left(1 + \frac{4l}{7\pi^2}\right) + \frac{1}{1 + \frac{4l}{7\pi^2}} - 1 \right\} + \frac{1}{98\left(1 + \frac{7\pi^2}{4l}\right)^2} \left(19 + \frac{24\pi^2}{l\left(1 + \frac{7\pi^2}{4l}\right)} \right) \quad (5.6).$$

⁷⁾ Vgl. K. K n o' p p, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl. (Berlin 1931), S. 540 bis 543.

In Bild 4 sind die Beiwerte (5.5a, b) als Funktionen von l graphisch dargestellt. Für den abteilungsweise konstanten geometrischen Anstellwinkel (5b) ist c_w ungefähr doppelt so groß wie im Falle (5a); das Maximum liegt näherungsweise bei $l = 3 > \frac{\pi^2}{2}$. (Im Falle (5b) konnte durch Experimente, bei denen l auf das Intervall $0,1 \leq l \leq 1,6$ beschränkt war, das Anwachsen des induzierten Widerstandes qualitativ festgestellt werden.)

Aus (4.10) folgen die von den gebundenen Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten

$$\frac{w_y}{V} = \frac{1}{2\dot{x}} \left(\alpha + \delta \frac{\pi \dot{x}}{l} \frac{K_1\left(\frac{\pi \dot{x}}{l}\right)}{1 + \frac{\pi^2}{4l}} \right) \cos \frac{\pi \dot{y}}{l} \dots \dots \dots (5.7a)$$

und

$$\frac{w_y}{V} = \frac{1}{2\dot{x}} \left\{ \alpha + \delta \frac{\pi \dot{x}}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K_1\left((4n+1)\frac{\pi \dot{x}}{l}\right)}{1 + (4n+1)\frac{\pi^2}{4l}} \cos(4n+1) \frac{\pi \dot{y}}{l} - \frac{K_1\left((4n+3)\frac{\pi \dot{x}}{l}\right)}{1 + (4n+3)\frac{\pi^2}{4l}} \cos(4n+3) \frac{\pi \dot{y}}{l} \right) \right\} \quad (5.7b).$$

Hieraus ergeben sich für $\dot{y} = 0$, $\alpha = \delta$ und verschiedene Werte von $l = \dot{l} = \text{const} > 0$ Kurvenscharen über \dot{x} , die monoton fallend zwischen $\frac{1}{\dot{x}}$ und $\frac{1}{2\dot{x}}$ verlaufen; der asymptotische Wert $\frac{1}{2\dot{x}}$ ist bei den Abszissen $\dot{x} = 2\dot{l}$, also jeweils eine Periodenlänge von der y -Achse entfernt, nahezu erreicht.

Mit Hilfe von (4.21) erhalten wir schließlich die von den freien Wirbeln induzierten Geschwindigkeiten

$$\frac{v_i}{V} = \delta \frac{\pi}{4l} \frac{\pi + H\left(\frac{\pi \dot{x}}{l}\right)}{1 + \frac{\pi^2}{4l}} \cos \frac{\pi \dot{y}}{l} \quad (5.8a)$$

und

$$\frac{v_i}{V} = \frac{\delta}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi + H\left((4n+1)\frac{\pi \dot{x}}{l}\right)}{1 + (4n+1)\frac{\pi^2}{4l}} \cos(4n+1) \frac{\pi \dot{y}}{l} - \frac{\pi + H\left((4n+3)\frac{\pi \dot{x}}{l}\right)}{1 + (4n+3)\frac{\pi^2}{4l}} \cos(4n+3) \frac{\pi \dot{y}}{l} \right) \quad (5.8b)$$

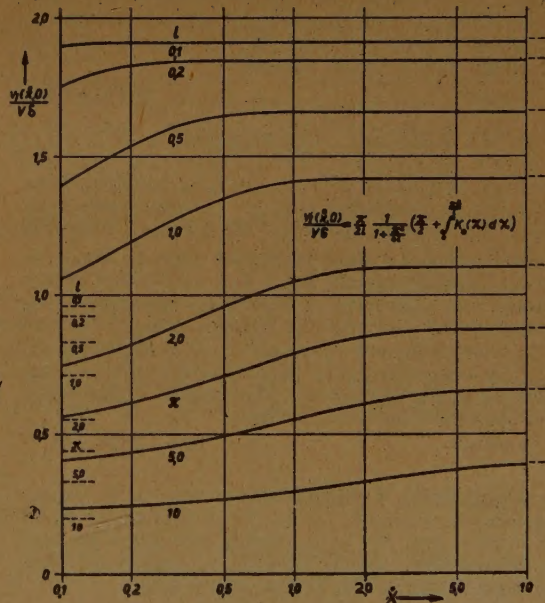


Bild 5

Für $\dot{y} = 0$ sind in Bild 5 die Funktionen v_i/V aus (5.8a) über \dot{x} und dem Parameter l wiedergegeben. Der Abwind ist von α unabhängig, proportional mit δ und umgekehrt proportional zu l . Wie die Abbildung erkennen läßt, wird der im Unendlichen herrschende Strömungszustand bei kurzen Periodenlängen rascher angestrebt als bei langen und ist etwa für $\dot{x} = l$, also ungefähr eine halbe Periodenlänge von der y -Achse entfernt, nahezu erreicht. Das gleiche gilt für (5.8b).

Eingegangen: 24. März 1949.

BUCHBESPRECHUNGEN

Prof. Albert Rohrberg (Abteilungsleiter a. d. Ingenieurschule Gauß in Berlin), *Graphische Funktionstafeln*, enthaltend die Mantissen der dekadischen Logarithmen und die goniometrischen Funktionen von Minute zu Minute auf vier Stellen. 30 S. Berlin 1949. Fachverlag Schiele und Schön. Preis brosch. 4,50 DM.

Die graphischen Tafeln enthalten Doppelskalen, in deren einer die Nummern bzw. Winkel, in deren anderer die Logarithmen, Sinus bzw. Tangenten der Winkel aufgezeichnet sind. Dabei liegt immer einem gleichmäßigen Skalenteil ein ungleichmäßiger gegenüber, aber keine der Skalen ist ihrer ganzen Länge nach gleichmäßig; sondern, je nachdem sich die günstigste Ableseung ergibt, teils gleichmäßig, teils ungleichmäßig. Die Skalen sind natürlich gebrochen, z. B. die für die Logarithmen achtzigmal. Die Unterbringung dieser einundachtzig Teilskalen erfordert acht Seiten. Die Maßeinheiten sind so gewählt, daß man ohne Interpolation vier Stellen, mit Interpolation fast überall 5 Stellen ablesen kann. Aber der Zweck dieser Tafeln soll es gerade sein, jede Interpolation zu ersparen. Dafür wird der große Vorteil gewöhnlicher vierstelliger Tafeln, daß es möglich ist, sämtliche Logarithmen auf zwei benachbarten Seiten unterzubringen, so daß bei ihrem Gebrauch ein Umblättern unnötig ist, gegeben. Dem gegenüber scheint mir die Arbeit, die das — vor allem bei Benutzung von Proportionalitätstafeln — leicht im Kopf auszuführende Interpolieren macht, ein geringer Nachteil, zumal auch das Aufsuchen und Ablesen einer Zahl in einer Skala, selbst wenn sie so gut und übersichtlich ist, wie in den vorliegenden Tafeln, umständlicher ist, als das einer gedruckten Zahl in einer Tabelle.

Dresden.

Willers.

Dr. W. Volkmann (Oberstudienrat a. D.), *Elemente physikalischer Experimentierkunst*. 2. Auflage. VIII + 173 S. m. 141 Abb. Bonn 1949, Ferd. Dummlers Verlag. Unveränderter Neudruck der Auflage von 1939. Preis brosch. 5,80 DM.

Das vorliegende Buch beschreibt einfache Versuche, die im Physikunterricht der Schule ausgeführt werden können und gibt dabei ausführliche allgemeine Hinweise für eine zweckmäßige Vorführentechnik. Es wird allen denen eine sehr erwünschte Hilfe bedeuten, die sich die Grundelemente physikalischer Unterrichtsversuche aneignen wollen oder die eine Unterrichtssammlung neu aufbauen müssen.

Dresden.

Recknagel.

Dr.-Ing. habil. K. Hirschfeld (o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Aachen), *Die Temperaturverteilung im Beton*. 154 S. mit 173 Abb. und 15 Zahlentafeln. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1948. Springer-Verlag. Preis brosch. 36,00 DM.

Die Frage nach der Temperaturverteilung in Betonkörpern wird erstmalig in einer physikalisch und mathematisch einwandfreien Form angeschnitten und für bestimmte Fälle gelöst. Ausgang der Untersuchung ist die allgemeine Wärmeleitungsgleichung, die unter Einführung der Temperaturleitfähigkeit $\alpha = \frac{\lambda}{c\gamma}$ und des Laplaceschen Operators in der Form $\frac{\delta\theta}{\delta t} = \alpha \Delta\theta + \frac{W}{c\gamma}$

angeschrieben wird. Durch Beschränkung auf planparallele Betonplatten und Betonzylinder von unendlicher Ausdehnung und durch Idealisierung der Problemstellung wird das dreidimensionale Problem in hinreichender Annäherung auf ein eindimensionales zurückgeführt und somit überhaupt eine numerische Lösung ermöglicht. Da für die praktische Anwendung der Rechenaufwand immer noch sehr umfangreich ist,

hat der Verfasser die Ergebnisse in zahlreichen Schaubildern niedergelegt, deren Benützung an konkreten Aufgaben erläutert wird.

Dresden.

Henn.

Dr. Wolfgang Gröbner und **Dr. Nikolaus Hofreiter**, *Integraltafel, Teil I: Unbestimmte Integrale*. VIII + 166 S. Wien und Innsbruck 1949. Springer-Verlag. Preis brosch. 18,00 DM.

Die vorliegende Integraltafel stellt eine Neubearbeitung und Erweiterung des Notdruckes dar, den die Verfasser im Jahre 1944 herausgebracht haben. Es ist anzuerkennen, daß sie sich der großen Mühe dieser Neubearbeitung unterzogen haben, die eine Lücke in der mathematischen Literatur Deutschlands ausfüllt; denn seit 1900 sind meines Wissens in deutscher Sprache bisher nur zwei Integraltafeln erschienen, und zwar 1906 die „Tafeln unbestimmter Integrale“ von G. Petit Bois und 1935 die „Integralformeln für Ingenieure und Studierende“ von Naske, die ja kaum größeren Ansprüchen genügen. Die vorliegende Integraltafel gliedert sich in drei Abschnitte: I. Rationale Integranden; II. Algebraische irrationale Integranden; III. Transzendente Integranden. Die Schreibweise der Integralformeln wurde konsequent der funktionentheoretischen Auffassung angepaßt, doch haben die Verfasser darüber hinaus auch den Forderungen der Praxis Rechnung getragen, indem sie die Formeln, soweit es erwünscht schien, außer in der funktionentheoretischen Schreibweise auch in einer für die numerischen Auswertung im Reellen geeigneteren Form angegeben haben. Zur Transformation der elliptischen Integrale auf die Legendresche Normalform benutzen die Verfasser mit Rücksicht auf zahlenmäßige Berechnungen die quadratischen Transformationen. Typographisch stellt die Integraltafel von Gröbner und Hofreiter ein Kuriosum und ein Meisterwerk dar: vom Vorwort und Inhaltsverzeichnis abgesehen ist nichts in Lettern gesetzt, sondern alles handgeschrieben und durch Steindruck vervielfältigt. Der Leser wird an der im einzelnen wie im Gesamtbild sauberen Ausführung seine Freude haben.

Freiburg Sa.

Grüß.

Hans von Mangoldt — Konrad Knopp, *Einführung in die Höhere Mathematik*. Bd. I 585 S. mit 112 Abb., Bd. II 634 S. mit 108 Abb., Bd. III 618 S. mit 103 Abb. Stuttgart 1948. Verlag S. Hirzel. Preis pro Band 24,80 DM.

Unter den so mannigfaltigen, mehr oder weniger strengen, leichter oder schwerer zu verstehenden, mehr den Anwendungen oder mehr der Theorie zugewandten Lehrbüchern der Höheren Mathematik werden die drei Bände von v. Mangoldt-Knopp immer ihren bevorzugten Platz behalten; sie verdanken ihn der glücklichen Mischung von Strenge und Anschaulichkeit, von abstrakter Theorie und lebendiger Anwendung. Von der siebenten Auflage an sah der Verfasser keine Möglichkeit mehr, sein Werk zu verbessern, es hat also offensichtlich seinen asymptotischen Idealzustand schon soweit erreicht, daß höchstens noch etwaige Druckfehler auszumerken bleiben. So ist auch die neunte Auflage ein fast unveränderter Abdruck der achten.

Freiburg.

Grüß.

Dr. phil. habil. Bruno von Freitag gen. Loringhoff, *Gedanken zur Philosophie der Mathematik*. 53 S., Meisenheim am Glan 1948. Westkulturverlag Anton Hain. Preis kart. 3,20 DM.

Das lesenswerte und gedankenreiche Büchlein hier zu erwähnen — eine Besprechung verbietet sich aus räumlichen Gründen —, erscheint vor allem deshalb gerecht-

fertigt, weil darin das Problem der Anwendbarkeit der Mathematik auf die Wirklichkeit am ausführlichsten und in einer recht lesbaren Form behandelt wird. Die philosophische Grundlage dazu bringt der erste Abschnitt, der die Seinsweise der mathematischen Gegenstände erörtert. An diesem bleibt freilich zu wünschen, daß der leicht irreführende Begriff des Fiktiven eindeutig festgelegt wird. Aus dem letzten die „menschliche Seite der Mathematik“ behandelnden Abschnitt sind vor allem die anregenden Betrachtungen zum Methodenproblem hervorzuheben.

Dresden. M. Draeger.

Dr.-Ing. W. Meyer zur Capellen, Mathematische Instrumente (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Herausgegeben von Prof. Dr. E. Kamke und Prof. Dr. A. Kretzer, Bd. 1). Dritte, ergänzte Aufl. X + 339 S. mit 250 Abb. Leipzig 1949. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest u. Portig Kom.-Ges. Preis geb. 23,00 DM.

Von der vorliegenden dritten Auflage des Buches, dessen erste in dieser Zeitschrift Bd. 21 (1941) S. 63 ausführlich besprochen wurde, waren zu Beginn des Jahres 1945 sämtliche Bogen ausgedruckt, doch konnte das Werk in jener Zeit nicht erscheinen. Der Inhalt war auf den damaligen Stand gebracht; unter anderem waren eine Reihe von Abbildungen, durch deren Güte sich das Buch von Anfang an auszeichnete, durch andere, die neuere Konstruktionen wiedergaben, ersetzt. Nach 1945 wurden dann zahlreiche neue, während des Krieges meist im Ausland konstruierte Apparate bekannt, vor allem die in den USA gebauten Rechenautomaten und die Neukonstruktion der Integriermaschine von Bush, auch konnte erst jetzt über die Entwicklung in Deutschland während des Krieges berichtet werden. Da der Verf. auf all dieses eingehen wollte, brachte er es in einem Nachtrag, in dem außerdem einige neuere harmonische Analysatoren und Synthesatoren behandelt werden. Auch das Schrifttumsverzeichnis, das jetzt 346 Nummern umfaßt, wurde durch einen Nachtrag ergänzt. Vielleicht sind in diesem Anhang die Rechenautomaten, bei denen nach dem Kriege eine äußerst

lebhaft Entwicklung eingesetzt hat, nicht nur in den USA, sondern auch in England, Frankreich und der USSR, dabei etwas zu kurz gekommen. Das läßt sich aber bei einer Neuauflage, bei der auch dieser Nachtrag eingearbeitet wird, leicht nachholen.

Das während des Krieges ins Englische übersetzte Buch wird auch in dieser Auflage ein gern benutztes Nachschlagewerk sein. Möge es mit dazu anregen, daß man sich in Deutschland, das bis 1945 für die Konstruktion vieler Gruppen mathematischer Instrumente führend war, wieder lebhafter als das in den letzten Jahren möglich war, an der Entwicklung auf diesen Gebieten beteiligt.

Dresden.

Willers.

Dr. Walter Lietzmann (Prof. a. d. Univ. Göttingen), **Elementare Kegelschnittlehre**, eine Einführung in die Methoden der Geometrie. 171 S. mit 104 Abb. Bonn 1949. Ferd. Dummlers Verlag. Preis brosch. 11,80 DM.

Ein inhaltsreiches Buch, in dem die Eigenschaften der Kegelschnitte aus den verschiedenen möglichen Definitionen so abgeleitet werden, wie es jeweils am zweckmäßigsten und einfachsten ist. Die einprägsame Gesamtübersicht und Vergleichsmöglichkeit wird dadurch etwas erschwert. Da den einzelnen Abschnitten Übungsaufgaben beigegeben sind, dürfte die Herausstellung dieses Vergleichs eine der wesentlichen Aufgaben sein, die der Leser nach der Durcharbeitung des Buches als einen Querschnitt unter anderem Gesichtswinkel zu lösen hätte.

In den einzelnen Kapiteln werden die planimetrische, stereometrische, analytische, affine, perspektive, projektive und gruppentheoretische Definition besprochen; der Äquivalenznachweis dieser Definitionen wird erbracht. — Wenn als Untertitel „Eine Einführung in die Methoden der Geometrie“ genannt wird, so wäre nach dieser Richtung hin eine etwas eingehendere prinzipielle Darstellung — wie sie am Schluß des ersten Abschnittes begonnen wird — wünschenswert gewesen.

Dresden.

M. Draeger.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten)

Dr. Walter Lietzmann (Prof. a. d. Univ. Göttingen). **Das Wesen der Mathematik**. (Sammlung „Die Wissenschaft“, Band 102. Herausgeber Prof. Dr.

Wilhelm Westphal.) VII/168 S. mit 41 Abb. Braunschweig 1949. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis karton. 8,— DM.

Druckfehlerberichtigung

zu **L. Collatz**, Differenzenverfahren zur numerischen Integration... Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 199—209.

Im ganzen Artikel lese man „Differenzenschemaverfahren“ statt „Differenzenverfahren“.

S. 199, 2. Absatz, Zeile 7: „Ersetzens“ statt „Einsetzens“.

Gleichung (7): „ $f^{(p+1)}(\xi)$ “ statt „ $f^{(p+1)}(\xi)$ “.

Gleichung (11): Rechts füge man hinzu „ $+ R_p$ “.

Gleichung (13): Das Integral über u hat 0 (nicht x) als untere Grenze.

Gleichung (14): In der Summe der oberen Zeile „ $f(x_0)$ “ statt „ $f(x)$ “.

Gleichung (26): In der oberen Zeile „ h^v “ statt „ h “.

Gleichung (27): „ $R_{p-1, p+1}^*$ “ statt „ $R_{p-1, p+1}$ “.

Gleichung (34): In der unteren Zeile „(12)“ statt „(11)“.

Gleichung (38): Man füge hinzu „ $(r = 2, 3)$ “.

Textzeile unter (38): „Iterationsformeln“ statt „Integrationsformeln“.

Textzeile unter (41): Hinter „ $n = 1$ “ füge man „ $m = 0$ “ ein.

Gleichung (46): „ f_r “ statt „ f “.

Gleichung (53): Das Ende der 3. Zeile lautet „ $y^{(m+1+2e)}(x_r)$ “.

Gleichung (57): „ K_e “ statt „ k_e “.

Gleichung (60): „ $|\beta_{n,p}|$ “ statt „ $|\beta_{m,p}|$ “.

Gleichung (61): „ K_{n-1} “ statt „ $K_{n=1}$ “.

Gleichung (64): Der Anfang der 2. Zeile lautet

$$e_m = \sum_{v=0}^{n-m-1} \frac{h^v}{v!} |e_r^{(m+v)}|.$$

4. Textzeile unter (64): „ $|\beta_{n-m,p}|$ “ statt „ $|\beta^{n-m,p}|$ “.

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

Zu G. Schulz: „Zwei Hilfssätze aus der Kombinatorik“. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948) 274–275.

Herr G. Schulz hat in dieser Zeitschrift die folgenden beiden Sätze bewiesen:

I. Gegeben ist eine Strecke, die in n gleiche Teile (Einheiten) geteilt ist. Dann ist die Anzahl der Möglichkeiten, k nicht unterscheidbare, l Einheiten lange Strecken so auf die gegebene Strecke zu verteilen, daß die Endpunkte jeder der k verteilten Strecken mit Einteilungspunkten zusammenfallen und keine Überdeckungen stattfinden (l ganzzahlig)

$$S_k^{(n)} = \binom{n - kl + k}{k} \dots \dots \dots (1).$$

II. Gegeben ist ein Kreis, dessen Umfang in n gleiche Teile (Einheiten) geteilt ist. Die Einteilungspunkte seien unterscheidbar. Dann ist die Anzahl der Möglichkeiten, k nicht unterscheidbare, l Einheiten lange Kreisbögen vom gleichen Radius wie der gegebene Kreis so auf diesen zu verteilen, daß die Endpunkte jedes der k verteilten Bögen mit Einteilungspunkten zusammenfallen und keine Überdeckungen stattfinden (l ganzzahlig) durch die Formel

$$Z_k^{(n)} = l \cdot S_{k-1}^{(n-l)} + S_k^{(n-1)} \dots \dots (2)$$

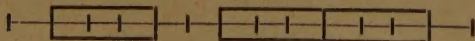
gegeben.

Sieht man von der geometrischen Einkleidung ab, so handelt es sich dabei um folgendes: Gegeben sind n verschiedene Elemente (die Einheitsstrecken bzw. -Kreisbögen), für welche eine bestimmte lineare bzw. zyklische Anordnung festgelegt ist. Es wird die Menge \mathfrak{M} derjenigen l -gliedrigen Kombinationen dieser Elemente betrachtet, deren Elemente eine Sequenz bilden, d. h. in der gegebenen Anordnung aufeinanderfolgen. Aus \mathfrak{M} sollen nun auf alle möglichen Arten k elementenfremde Kombinationen ausgewählt werden. Man hat es also hier mit Kombinationen von Kombinationen zu tun, wobei jede dieser beiden Arten von Kombinationen einer einschränkenden Bedingung unterworfen ist.

Kombinatorische Anzahlbestimmungsprobleme lassen häufig verschiedene äquivalente Deutungen zu und es kommt gelegentlich vor, daß sich darunter eine Deutung findet, durch welche das Problem auf eine der Grundformeln der Kombinatorik zurückgeführt wird. So ist es auch bei dem Problem I. Bekanntlich ist die Anzahl der Permutationen von α gleichen Dingen a und β gleichen Dingen b gleich

$$\frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} = \binom{\alpha + \beta}{\alpha} \dots \dots \dots (3).$$

Nimmt man als Dinge a die Bedeckungsstrecken der Länge l (also $\alpha = k$) und als Dinge b die unbedeckten Einheitsstrecken (also $\beta = n - kl$), so liefert die Anwendung von (3) unmittelbar die Formel (1). Es besteht eben ein ein-eindeutiges Entsprechen zwischen den im Satz I betrachteten Bedeckungen und den genannten Permutationen, auf Grund dessen z. B. der Bedeckung ($n = 13$, $k = 3$, $l = 3$)



umkehrbar eindeutig die Permutation *babbaab* zugeordnet ist.

Wie man daraus ersieht, gibt $S_k^{(n)}$ auch die Anzahl der geordneten Zerlegungen der Zahl n in $n - kl + k$ Summanden an, bei denen k Summanden gleich l und die übrigen $n - kl$ gleich 1 sind ($13 = 1 + 3 + 1 + 1 + 3 + 3 + 1$). Richtet man sein Augenmerk nicht auf die Bedeckungsstrecken, sondern auf die zwischen ihnen liegenden Lücken, so zeigt sich, daß $S_k^{(n)}$ auch die Anzahl der geordneten additiven Zerlegungen der Zahl $n - kl$ in $k + 1$ nichtnegative, ganzzahlige Summanden ist ($4 = 1 + 2 + 0 + 1$).

Zu einer expliziten Formel für das Problem II gelangt man auch durch folgende Überlegung: Ein erster Bogen kann auf n Arten aufgelegt werden. Liegt er, so bleiben für die übrigen $k - 1$ Bögen noch $S_{k-1}^{(n-l)}$ Möglichkeiten. Man erhält also für alle k Bögen zusammen zunächst die Zahl von $n \cdot S_{k-1}^{(n-l)}$ Möglichkeiten. Da jedoch hierbei jede derselben k mal gezählt ist, folgt

$$Z_k^{(n)} = \frac{n}{k} S_{k-1}^{(n-l)} = \frac{n}{k} \binom{n - kl + k - 1}{k - 1} \dots \dots \dots (4).$$

$$= n \cdot \frac{(n - kl + k - 1)!}{k! (n - kl)!}$$

Zu demselben Wert gelangt man durch Einsetzen von (1) in (2).

Auch folgende Verallgemeinerung von I läßt sich auf Permutationen mit Wiederholung zurückführen:

I*. Gegeben ist eine Strecke, die in n gleiche Teile (Einheiten) geteilt ist. Auf wievielfache Weise kann man k_1 Strecken der Länge l_1 , k_2 Strecken der Länge l_2 , ..., k_p Strecken der Länge l_p , von denen die gleichlangen nicht unterscheidbar sind, so auf die gegebene Strecke verteilen, daß die Endpunkte jeder der verteilten Strecken mit Einteilungspunkten zusammenfallen und keine Überdeckungen stattfinden?

Es handelt sich hier um die Permutationen von k_1 gleichen Dingen a (Strecken der Länge l_1 , k_2 gleichen Dingen b (Strecken der Länge l_2) usw. und $n - \sum k_i l_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, p$) gleichen Dingen p (unbedeckte Strecken der Länge 1). Die bekannte Formel liefert hierfür die Anzahl

$$S_{k_1 k_2 \dots k_p}^{(n)} = \frac{(n - \sum k_i l_i + \sum k_i)!}{k_1! k_2! \dots k_p! (n - \sum k_i l_i)!} \quad (5).$$

Genau wie oben läßt sich auch die Lösung des entsprechend verallgemeinerten Problems II*, auf dessen Formulierung hier verzichtet werden kann, angeben, nämlich

$$Z_{k_1 k_2 \dots k_p}^{(n)} = \frac{n}{k_1} S_{k_1-1 k_2 \dots k_p}^{(n-l_1)} \dots \dots \dots (6).$$

$$= n \cdot \frac{(n - \sum k_i l_i + \sum k_i - 1)!}{k_1! k_2! \dots k_p! (n - \sum k_i l_i)!}$$

Stuttgart.

E. Schönhardt.

Die Zuschrift hat Herrn Prof. Dr. G. Schulz vorgelegen.
W.